Die Weierstrass-Substitution

Es wurde bereits begründet, dass man zu allen gebrochenrationalen Funktionen eine Stammfunktion ermitteln kann. Es geht aber noch viel mehr: Man kann auch zu allen Funktionen eine Stammfunktion ermitteln, die dadurch entstehen, dass man in einer gebrochenrationale Funktion alle x durch sin(x) und/oder cos(x) ersetzt! Dafür gibt es sogar eine allgemeine Methode: Man verwendet die Substitution

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right).$$

Damit hat man einerseits

$$x = 2\arctan(t) \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2}dt,$$

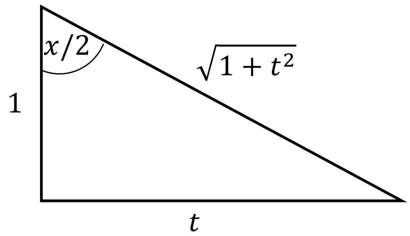
andererseits kann man aber auch sin(x) und cos(x) durch t ausdrücken. Allerdings muss man sie zunächst etwas umschreiben: In der Substitution steht im Tangens ja x/2 statt x, also braucht man auch sin(x/2) und cos(x/2). Deshalb verwendet man zunächst die Formeln aus der Formelsammlung für den doppelten Winkel:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha);\ \ \cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha).$$

Mit $\alpha = \frac{x}{2}$ erhält man daraus

$$\sin(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right);\ \ \cos(x) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \quad (*)$$

und benötigt nun noch Zusammenhänge zwischen $\sin\left(\frac{x}{2}\right), \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ und $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = t$. Dafür schaut man sich ein rechtwinkliges Dreieck an, dessen einer Winkel eben $\frac{x}{2}$ ist. Damit darin $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = t$ ist, wählen wir für die Länge der Gegenkathete zu diesem Winkel eben t, für die Länge der Ankathete 1:



Für die Länge der Hypotenuse ergibt sich nach dem Satz von Pythagoras dann $\sqrt{1+t^2}$, und damit folgt:

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}};\quad \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

(Streng genommen haben wir diese Zusammenhänge nur für $0 < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}$ begründet, man kann aber nachrechnen, dass sie für alle $0 \le \frac{x}{2} \le 2\pi$ gelten.)

Setzen wir diese Ergebnisse in (*) ein, so folgt schließlich

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2};\ \ \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Haben wir also eine Funktion von der oben beschriebenen Form und verwenden wir die oben angegebene Substitution, so erhalten wir sowohl vom dx als auch von allen Termen mit sin(x) und/oder cos(x) jeweils gebrochenrationale Terme in t. Damit ist der Integrand dann insgesamt eine gebrochenrationale Funktion in t. Und dass wir zu solchen Funktionen immer eine Stammfunktion ermitteln können, wurde ja bereits gesagt.

Mit einem Beispiel wird das alles sicher klarer. Gesucht ist eine Stammfunktion zu $\int \frac{1}{\cos(x)-\sin(x)}dx.$

Verwenden wir die Substitution von oben und setzen die hergeleiteten Terme für sin(x) und cos(x) ein, so wird dies zunächst zu $\int \frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2}-\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt.$

Das ist bereits eine gebrochenrationale Funktion. Bevor wir die Stammfunktion dazu bestimmen, sollten wir natürlich noch ein wenig vereinfachen und umformen. Die beiden Brüche können wir multiplizieren und kürzen und erhalten $\int \frac{2}{(1-t^2)-2t}dt.$ $\quad(**)$

Jetzt geht es mit Standardmethoden weiter: Passend ausklammern, quadratische Ergänzung, Substitution, passende Formel aus der Formelsammlung verwenden:

$$= 2\int \frac{1}{1-(t^2+2t)}dt = 2\int \frac{1}{1-((t+1)^2-1)}dt = 2\int \frac{1}{2-(t+1)^2}dt = 2\int \frac{1}{2-u^2}du$$

$$= \frac{2}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+u}{\sqrt{2}-u}\right| + C = \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+(t+1)}{\sqrt{2}-(t+1)}\right| + C.$$

Jetzt könnten wir die ursprüngliche Substitution wieder rückgängig machen. Günstiger ist es aber, erst noch ein wenig zu vereinfachen. Zunächst erweitern wir den Bruch mit $\sqrt{2}+(t+1)$ und verwenden dann im Zähler die erste, im Nenner die dritte binomische Formel,

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+(t+1)}{\sqrt{2}-(t+1)}\cdot\frac{\sqrt{2}+(t+1)}{\sqrt{2}+(t+1)}\right| + C = \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{2+2\sqrt{2}(t+1)+(t+1)^2}{2-(t+1)^2}\right| + C$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{\left(2\sqrt{2}+2\right)(t+1)+t^2+1}{1-t^2-2t}\right| + C.$$

Der Nenner sieht jetzt genauso aus wie in (*). Den Ausdruck (**) hatten wir erhalten, indem wir im Nenner in den Termen, die von sin(x) und cos(x) kamen, jeweils den Faktor $1+t^2$ gekürzt hatten. Machen wir das nun rückgängig, damit wir wieder die Terme für sin(x) und cos(x) erhalten; danach können wir dann auch die Substitution von t rückgängig machen,

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{\left(2\sqrt{2}+2\right)\frac{t+1}{t^2+1}+1}{\frac{1-t^2}{1+t^2}-\frac{2t}{1+t^2}}\right| + C = \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{\left(2\sqrt{2}+2\right)\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1}{\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)+1}+1}{\cos(x)-\sin(x)}\right| + C.$$

Im Bruch, der im Zähler steht, erweitern wir jetzt noch mit $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$, um den Tangens loszuwerden,

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{\left(2\sqrt{2}+2\right)\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}+1}{\cos(x)-\sin(x)}\right| + C,$$

und wenden schließlich noch die Formeln (*) und den trigometrischen Pythagoras an.

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{\left(2\sqrt{2}+2\right)\frac{\frac{1}{2}\sin(x)+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(x)}{1}+1}{\cos(x)-\sin(x)}\right| + C$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)(\sin(x)+\cos(x))+\sqrt{2}+2}{\cos(x)-\sin(x)}\right| + C.$$