# Integrale vereinfachen mit Symmetrie

Aus der 12. Klasse weiß man hoffentlich noch:

- $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$, wenn f eine ungerade Funktion ist,
- $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$, wenn f eine gerade Funktion ist

Da man prinzipiell jede Funktion schreiben kann als eine Summe aus einer geraden und einer ungeraden Funktion, kann man sich damit viele Integrale vereinfachen.

einfaches Beispiel:

$$\int_{-1}^{1}(x^4 - 5x^3)dx = \int_{-1}^{1} x^4 dx - 5\int_{-1}^{1} x^3 dx = 2\int_0^1 x^4 dx - 0 = 2\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{2}{5}$$

Damit kann man aber auch noch weit komplizierte Integrale vereinfachen. Wir betrachten im Folgenden ein sehr allgemeines Integral, in dem f und g gerade Funktionen sind, h dagegen eine ungerade Funktion ist:

$$I = \int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{1 + g(x)^{h(x)}}\,dx$$

Zunächst verwenden wir die Substitution $x = -u$, also $dx = -du$. Damit erhalten wir

$$I = -\int_{a}^{-a} \frac{f(-u)}{1 + g(-u)^{h(-u)}}\,du.$$

Mit dem Minuszeichen können wir die Integrationsgrenzen wieder umdrehen. Außerdem nutzen wir nun aus, dass f und g gerade sind, h aber ungerade ist. Das ergibt

$$I = \int_{-a}^{a} \frac{f(u)}{1 + g(u)^{-h(u)}}\,du$$

Wie die Integrationsvariable heißt, ist aber für den Wert des Integrals aber völlig egal. Nennen wir sie also einfach wieder x,

$$I = \int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{1 + g(x)^{-h(x)}}\,dx.$$

Addieren wir das zu unserem ursprünglichen Integral dazu, dann haben wir insgesamt

$$2I = \int_{-a}^{a} \left(\frac{f(x)}{1 + g(x)^{h(x)}} + \frac{f(x)}{1 + g(x)^{-h(x)}}\right) dx.$$

Sieht erst mal ziemlich unangenehm aus. Aber man kann es deutlich vereinfachen – mit ein wenig Bruchrechnen! Das f(x) können wir erst mal ausklammern; dann werden die beiden Brüche auf denselben Nenner erweitert:

$$2I = \int_{-a}^{a} f(x)\left(\frac{1 + g(x)^{-h(x)}}{(1 + g(x)^{h(x)})(1 + g(x)^{-h(x)})} + \frac{1 + g(x)^{h(x)}}{(1 + g(x)^{h(x)})(1 + g(x)^{-h(x)})}\right) dx.$$

Sieht noch schlimmer aus! Nun können wir aber die Zähler addieren und den Nenner ausmultiplizieren. Beachten wir dabei, dass $g(x)^{h(x)} \cdot g(x)^{-h(x)} = g(x)^0 = 1$ ist, dann erhalten wir

$$2I = \int_{-a}^{a} f(x) \left( \frac{1 + g(x)^{-h(x)} + 1 + g(x)^{h(x)}}{1 + g(x)^{-h(x)} + g(x)^{h(x)} + 1} \right) dx.$$

Zähler und Nenner sind nun also völlig gleich, und damit hat der Bruch schlicht den Wert 1!

Damit bleibt nur noch

$$2I = \int_{-a}^{a} f(x) dx,$$

und wenn wir nochmals ausnutzen, dass f gerade ist, vereinfacht sich das nochmals zu

$$I = \int_{0}^{a} f(x) dx.$$

Der komplette komplizierte Nenner ist also rein durch die Symmetriebetrachtungen verschwunden! Damit können wir nun Integrale berechnen, die auf den ersten Blick hoffnungslos aussehen. Zwei Beispiele:

1) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{1+e^x} dx = \int_0^{\pi/2} \cos(x) dx = [\sin(x)]_0^{\pi/2} = 1$

Dabei haben wir ausgenutzt, dass f(x) = cos(x) und g(x) = e gerade Funktionen sind, h(x) = x dagegen eine ungerade Funktion ist.

2) $\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{1+\cos(x)^{\sin(x)}} dx = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

Dabei haben wir ausgenutzt, dass f(x) = $x^2$ und g(x) = cos(x) gerade Funktionen sind, h(x) = sin(x) dagegen eine ungerade Funktion ist.

(Die Idee stammt übrigens nicht von mir, sondern aus diesem Video:

https://www.youtube.com/watch?v=xiIsPEqyTqU.)