Integrale von (natürlichen) Potenzen von sin

– und das „Wallis-Produkt" für π

Im Unterricht wurde bereits besprochen, wie man $\int \sin^2(x)\,dx$, $\int \sin^3(x)\,dx$, $\int \sin^4(x)\,dx$, ... prinzipiell berechnen kann (bei geraden Potenzen: $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$ verwenden; bei ungeraden Potenzen $z = \cos(x)$ substituieren). Hier soll aber nun eine allgemeine Formel für beliebige natürliche Potenzen hergeleitet werden, sodass man sich in Zukunft sparen kann, die Integrale überhaupt noch berechnen zu müssen.

Ziel ist es also, eine Stammfunktion zu $\int \sin^n(x)\,dx$ zu bestimmen mit $n \in \mathbb{N}$; diese bezeichnen wir im Folgenden mit $F_n(x)$. Im Wesentlichen werden wir versuchen, die „Phönix"-Methode zu verwenden. Fangen wir also mit einer partiellen Integration an; dafür schreiben wir den Integranden zunächst als Produkt:

$$F_n(x) = \int \sin^{n-1}(x) \cdot \sin(x)\,dx.$$

Den ersten Faktor leiten wir nun ab, den zweiten auf:

$$F_n(x) = \sin^{n-1}(x) \cdot (-\cos(x)) - \int (n-1)\sin^{n-2}(x)\cos(x) \cdot (-\cos(x))\,dx$$

Im hinteren Summanden können wir nun die Kosinusfunktionen zusammenfassen; außerdem können wir die konstanten Faktoren $(n-1)$ und -1 aus dem Integral herausziehen:

$$F_n(x) = -\sin^{n-1}(x)\cos(x) + (n-1)\int \sin^{n-2}(x) \cdot \cos^2(x)\,dx$$

Dass im zweiten Integral nun auch Kosinusfunktionen stehen, stört natürlich bei der weiteren Rechnung. Aber wir haben ja schon öfters verwendet, dass man diese mit dem „trigonometri-schen Pythagoras" wieder in Sinusfunktionen umschreiben kann:

$$F_n(x) = -\sin^{n-1}(x)\cos(x) + (n-1)\int \sin^{n-2}(x) \cdot (1 - \sin^2(x))dx$$

Das übrige Integral können wir nun in zwei Integrale aufteilen,

$$F_n(x) = -\sin^{n-1}(x)\cos(x) + (n-1)\int \sin^{n-2}(x)\,dx - (n-1)\int \sin^n(x)\,dx$$

Damit haben wir aber nun den „Phönix" gefunden: hinten steht einfach wieder das ursprüngliche Integral. Außerdem findet sich im mittleren Summanden fast das ursprüngliche Integral wieder, aber eben mit der Potenz $n-2$ statt der Potenz n, also

$$F_n(x) = -\sin^{n-1}(x)\cos(x) + (n-1)F_{n-2}(x) - (n-1)F_n(x)$$

Bringen wir $(n-1)F_n(x)$ auf die linke Seite und fassen zusammen, dann haben wir

$$n\,F_n(x) = -\sin^{n-1}(x)\cos(x) + (n-1)F_{n-2}(x);$$

also bleibt schließlich

$$\boxed{F_n(x) = -\frac{\sin^{n-1}(x)\cos(x)}{n} + \frac{n-1}{n}F_{n-2}(x).}$$

Das ist zwar keine Formel, mit der wir die gesuchten Stammfunktionen alle direkt angeben können – aber zumindest ist es eine sogenannte „Rekursionsrelation": Wenn ein Integral bekannt zur Potenz $n-2$ ist, dann kann man die Stammfunktion zur Potenz n nun leicht ausrechnen, ohne nochmals ein Integral berechnen zu müssen. Daraus erhält man dann die Stammfunktion zur Potenz $n+2$ usw.

Was noch fehlt, sind nur die „Startwerte" für die niedrigsten möglichen Potenzen $n = 0$ und $n = 1$; diese sind ja aber beide sehr einfach:

$$F_0(x) = \int \sin^0(x)\,dx = \int 1\,dx = x + C; \quad F_1(x) = \int \sin^1(x)\,dx = -\cos(x) + C$$

Mit der Rekursionsrelation erhalten wir daraus beispielsweise sofort:

$$F_2(x) = \int \sin^2(x)\,dx = -\frac{\sin^{2-1}(x)\cos(x)}{2} + \frac{2-1}{2}F_{2-2}(x) = -\frac{\sin(x)\cos(x)}{2} + \frac{1}{2}x + C$$

und

$$F_3(x) = \int \sin^3(x)\,dx = -\frac{\sin^{3-1}(x)\cos(x)}{3} + \frac{3-1}{3}F_{3-2}(x) = -\frac{\sin^2(x)\cos(x)}{3} - \frac{2}{3}\cos(x) + C$$

Ist man nur an bestimmten Integralen interessiert, dann erhält man sofort noch deutlich einfachere Ergebnisse. Beispielsweise ist mit der Rekursionsformel

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n(x)\,dx = \left[-\frac{\sin^{n-1}(x)\cos(x)}{n}\right]_0^{\pi/2} + \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}(x)\,dx,$$

und wenn man im vorderen Summanden die beiden Integrationsgrenzen einsetzt, dann verschwindet dieser komplett (wegen $\sin(0) = 0$ und $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$); es bleibt also nur noch

$$\boxed{\int_0^{\pi/2} \sin^n(x)\,dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x)\,dx.} \ (*)$$

Mit $\int_0^{\pi/2} \sin^0(x)\,dx = \int_0^{\pi/2} 1\,dx = \frac{\pi}{2}$ und $\int_0^{\pi/2} \sin^1(x)\,dx = [-\cos(x)]_0^{\pi/2} = 1$ erhalten wir daraus beispielsweise

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\,dx = \frac{2-1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin^0(x)\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}; \int_0^{\pi/2} \sin^3(x)\,dx = \frac{3-1}{3}\int_0^{\pi/2} \sin^1(x)\,dx = \frac{2}{3}\cdot 1 = \frac{2}{3}.$$

Bis hierhin wurde die Rechnung übrigens inspiriert von https://www.youtube.com/watch?v=0aVVudlsq40, auch wenn ich hier dann doch deutlich anders vorgegangen bin. Im Folgenden baue ich dann eher auf diesem Video auf: https://www.youtube.com/watch?v=l_FUOCH3EBE. Eine sehr ähnliche Rechnung findet sich auch in https://www.youtube.com/watch?v=EZSiQv_G9HM, eine deutliche andere Herleitung desselben Ergebnisses dagegen in https://www.youtube.com/watch?v=EZSiQv_G9HM.

Letztlich geht es um den Beweis einer Darstellung von π als „unendliches Produkt", welche in sehr ähnlicher Form (aber mit komplett anderen Methoden, vgl. das dritte Video oben) bereits um 1655 vom englischen Mathematiker John Wallis (1616–1703) entdeckt wurde:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot \ldots}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots}$$

Im Zähler des Bruchs steht also ein Produkt aus allen geraden Zahlen, wobei jede zweimal vorkommt; im Nenner dagegen ein Produkt aus allen ungeraden Zahlen, von denen jede ebenfalls zweimal vorkommt.

Oben haben wir bereits gesehen, dass sich bei geraden und bei ungeraden Potenzen von sin deutlich unterschiedliche Werte für das Integral (*) ergeben: Im ersteren Fall haben wir rationale Vielfache von π, im letzteren einfach nur rationale Zahlen. Schauen wir uns die bestimmten Integrale mit geraden Potenzen $2n$ und ungeraden Potenzen $2n + 1$ also mal getrennt an; im Folgenden kürzen wir diese mit I_{2n} bzw. I_{2n+1} ab:

$$I_{2n} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n}(x)\,dx = \frac{2n-1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2}(x)\,dx, \text{ z. B. } I_0 = \frac{\pi}{2}, I_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, I_4 = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, I_6 = \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, \ldots$$

und

$$I_{2n+1} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(x)\,dx = \frac{2n}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1}(x)\,dx, \text{ z. B. } I_1 = 1, I_3 = \frac{2}{3}, I_5 = \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}, I_7 = \frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}, \ldots;$$

allgemein gilt: $I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \ldots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$ und $I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \ldots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}$.

Das sieht schon mal ganz gut aus: bei den einen Integralen ergibt sich im Zähler ein Produkt aus den ungeraden Zahlen, im Nenner ein Produkt aus den geraden Zahlen; bei den anderen Integralen genau umgekehrt. Außerdem haben wir bei der ersten Sorte von Integralen auch schon ein $\frac{\pi}{2}$ stehen. Damit wir das gewünschte Wallis-Produkt erhalten, bei dem jeder Faktor doppelt vorkommt, müssen wir also anscheinend nur irgendwie die zweite Sorte von Integralen durch die erste Sorte teilen

$$\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \frac{\frac{2n}{2n+1} \cdot \ldots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{2n-1}{2n} \cdot \ldots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}} = \frac{2n \cdot 2n \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2}{(2n+1) \cdot (2n-1) \cdot \ldots \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 + 1} \cdot \frac{2}{\pi}$$

Der erste Bruch ist nun, wenn man n gegen unendlich gehen lässt, in der Tat genau das Wallis-Produkt. Allerdings steht dahinter noch der Bruch $\frac{2}{\pi}$ – und das ist ja genau falsch herum! Holen wir diesen Bruch also auf die andere Seite der Gleichung, dann ist er richtig herum:

$$\frac{2n \cdot 2n \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2}{(2n+1) \cdot (2n-1) \cdot \ldots \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 + 1} = \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \cdot \frac{\pi}{2}$$

Um zu beweisen, dass das (unendliche) Wallis-Produkt tatsächlich $\frac{\pi}{2}$ ergibt, müssen wir also „nur'' noch zeigen, dass der Bruch $\frac{I_{2n+1}}{I_n}$ für $n \to\to \infty$ gegen 1 geht, d. h. die Werte der Integrale werden mit wachsendem n immer ähnlicher zueinander.

Um das zu zeigen, machen wir eine Abschätzung: Das Integral verläuft ja über das Intervall $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, und in diesem Intervall gilt sicher $0 \leq \sin^n(x) \leq 1$. Wenn man eine Zahl zwischen 0 und 1 potenziert, dann wird das Ergebnis aber sicher umso kleiner, je höher die Potenz ist; es gilt also:

$$\sin^{2n}(x) \leq \sin^{2n+1}(x) \leq \sin^{2n+2}(x)$$

und damit sicher auch

$$I_{2n} \leq I_{2n+1} \leq I_{2n+2}$$

Mit der Rekursionsrelation (*) können wir den hinteren Term aber noch umschreiben,

$$I_{2n} \leq I_{2n+1} \leq \frac{2n+1}{2n+2} \cdot I_{2n}$$

Teilen wir diese Doppelungleichung durch I_{2n}, dann haben wir in der Mitte genau den gewünschten Bruch, vorne ergibt sich natürlich 1, und hinten bleibt der Bruch übrig:

$$1 \leq \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \leq \frac{2n+1}{2n+2}$$

Für $\frac{2n+1}{2n+2}$ gilt aber sicher $\frac{2n+1}{2n+2} \to 1$ (ZG = NG, Quotient der Leitkoeffizienten!). Also bleibt

$$1 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \leq 1,$$

und diese Doppelungleichung kann offensichtlich nur dann erfüllt sein, wenn $\lim_{n\to\infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1$ gilt. Damit ist aber nun

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n \cdot 2n \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2}{(2n+1) \cdot (2n-1) \cdot \ldots \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 + 1} = \frac{\pi}{2},$$

die Wallis-Produktdarstellung für π ist also bewiesen.