Die beiden noch fehlenden Integrale aus der Formelsammlung

1) Zunächst brauchen wir eine kleine Vorarbeit: Wir berechnen $\int \frac{1}{\cos(u)} du$. Dafür nutzen wir den Trick, den wir im Unterricht besprochen haben: Wir substituieren t = sin(u). Dann folgt $du = \frac{dt}{\cos(u)}$ und damit

$$\int \frac{1}{\cos(u)} du = \int \frac{1}{\cos(u)} \frac{dt}{\cos(u)} = \int \frac{1}{\cos^2(u)} dt = \int \frac{1}{1-\sin^2(u)} dt = \int \frac{1}{1-t^2} dt.$$

Dieses Integral finden wir nun in der Formelsammlung (mit $a^2 = 1$, $x^2 = t^2$):

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sin(u)}{1-\sin(u)} \right| + C$$

Das könnte man so stehen lassen, für weiter unten ist es aber hilfreich, das noch weiter umzuformen. Dafür erweitern wir den Bruch mit (1 + sin(u)), dann können wir nämlich im Nenner die 3. binomische Formel und den trigonometrischen Pythagoras ausnutzen:

$$\int \frac{1}{\cos(u)} du = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sin(u)}{1-\sin(u)} \cdot \frac{1+\sin(u)}{1+\sin(u)} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(1+\sin(u))^2}{1-\sin^2(u)} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(1+\sin(u))^2}{\cos^2(u)} \right| + C$$

Das Quadrat können wir nun auch über den kompletten Bruch schreiben und sogar außen an den Betrag hin, und dann können wir die Logarithmusrechenregel für Potenzen ausnutzen:

$$\int \frac{1}{\cos(u)} du = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sin(u)}{\cos(u)} \right|^2 + C = \frac{1}{2} \cdot 2 \ln \left| \frac{1+\sin(u)}{\cos(u)} \right| + C.$$

Nach Kürzen der Brüche bleibt schließlich:

$$\int \frac{1}{\cos(u)} du = \ln \left| \frac{1}{\cos(u)} + \tan(u) \right| + C.$$

Alternativ geht's auch viel schneller mit dem folgenden Trick (nach https://www.youtube.com/watch?v=Lioe0wWCmVE): Wir multiplizieren den Integranden mit

$$1 = \frac{\frac{1}{\cos(u)} + \tan(u)}{\frac{1}{\cos(u)} + \tan(u)},$$

haben also

$$\int \frac{1}{\cos(u)} du = \int \frac{1}{\cos(u)} \frac{\frac{1}{\cos(u)} + \tan(u)}{\frac{1}{\cos(u)} + \tan(u)} du = \int \frac{\frac{1}{\cos^2(u)} + \frac{\sin(u)}{\cos^2(u)}}{\frac{1}{\cos(u)} + \tan(u)} du.$$

Das sieht jetzt zwar fürchterlich kompliziert aus – aber wegen $\left(\frac{1}{\cos(u)}\right)' = \frac{\sin(u)}{\cos^2(u)}$ und $(\tan(u))' = \frac{1}{\cos^2(u)}$ ist hier nun einfach der Zähler gleich der Ableitung des Nenners! Mit der bekannten Formel $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$ folgt also sofort wieder das obige Ergebnis:

$$\int \frac{1}{\cos(u)} du = \ln \left| \frac{1}{\cos(u)} + \tan(u) \right| + C.$$

Jetzt geht es erst richtig los mit dem gesuchten Integral aus der Formelsammlung. Zunächst klammern wir mal das a^2 aus und ziehen die Wurzel, dann wird es ein wenig einfacher:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{a^2\left(\frac{x^2}{a^2}+1\right)}}dx = \int \frac{1}{|a|\sqrt{\left(\frac{x}{|a|}\right)^2+1}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x}{|a|}\right)^2+1}}\frac{dx}{|a|},$$

wobei $\sqrt{a^2} = |a|$ und $a^2 = |a|^2$ verwendet wurde. Mit der Substitution $z = \frac{x}{|a|}$, also $dz = \frac{dx}{|a|}$, bleibt dann erst mal nur noch $\int \frac{1}{\sqrt{z^2+1}}dz$.

Weiter: Aus Aufgabe 2 auf Seite 71 wissen wir, dass es bei Wurzeln aus quadratischen Termen oft sinnvoll sein kann, trigonometrische Funktionen zu substituieren: Sinus, Kosinus, Tangens, außerdem gibt es auch noch den Sekans, Kosekans und Kotangens: $\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$, $\csc(x) = \frac{1}{\sin(x)}$, $\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}$. Welche davon sinnvoll ist, sieht man nicht immer auf Anhieb, manchmal muss man einfach ein wenig rumprobieren, mit der Zeit hat man aber ein wenig Erfahrung, was klappt. Hier hilft z = tan(u) weiter, also $dz = \frac{du}{\cos^2(u)}$:

$$\int \frac{1}{\sqrt{z^2+1}}dz = \int \frac{1}{\sqrt{\tan^2(u)+1}}\frac{du}{\cos^2(u)} = \int \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2(u)}}}\frac{du}{\cos^2(u)} = \int \frac{\sqrt{\cos^2(u)}}{\cos^2(u)}du$$

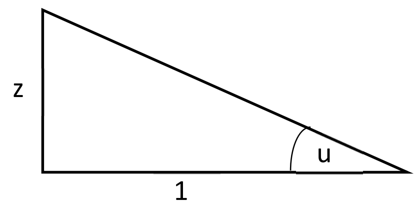
Hier ist cos(u) > 0, weil in der Substitution für den tan nur $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$ nötig ist. Damit folgt:

$$\int \frac{1}{\sqrt{z^2+1}}dz = \int \frac{\cos(u)}{\cos^2(u)}du = \int \frac{1}{\cos(u)}du,$$

und das hatten wir ja oben schon als Vorarbeit ausgerechnet! Also ist

$$\int \frac{1}{\sqrt{z^2+1}}dz = \ln\left|\frac{1}{\cos(u)} + \tan(u)\right| + C.$$

Wir wissen aus der Substitution, dass z = tan(u) ist, hier brauchen wir aber auch noch 1/cos(u). Schreiben wir z als z/1, muss also in einem rechtwinkligen Dreieck z die Gegenkathete und 1 die Ankathete zum Winkel u sein:



Nach dem Satz von Pythagoras hat dann die Hypotenuse die Länge $\sqrt{z^2+1}$, also ist $\frac{1}{\cos(u)} = \frac{\sqrt{z^2+1}}{1} = \sqrt{z^2+1}$. Damit folgt schließlich:

$$\int \frac{1}{\sqrt{z^2+1}}dz = \ln\left|\sqrt{z^2+1} + \mathrm{z}\right| + C.$$

Nun müssen wir nur noch die erste Substitution rückgängig machen und erhalten

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \ln\left|\frac{x}{|a|} + \sqrt{\left(\frac{x}{|a|}\right)^2 + 1}\right| + C$$

Den Faktor $\frac{1}{|a|}$ kann man aus der Wurzel herausziehen und ausklammern…

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \ln\left|\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right)\cdot\frac{1}{|a|}\right| + C,$$

und mit einer Logarithmusrechenregel ist das dann

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = \ln\left|\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)\right| - \ln|a| + C.$$

Der Summand $-\ln|a|$ ist aber einfach eine Konstante, und hinten steht sowieso schon plus eine beliebige Konstante. Deshalb kann man diesen Summanden dann einfach weglassen. Fertig!

Das Integral $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx$ funktioniert im Prinzip ähnlich, aber man substituiert $z = \sec(u) = \frac{1}{\cos(u)}$. Außerdem gibt es hier zusätzliche Probleme, weil nun cos(u) positiv oder negativ sein kann; beide Fälle muss man getrennt rechnen (viel Spaß!). Wenn man alles richtig macht, erhält man aber in beiden Fällen schließlich dasselbe Ergebnis

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \ln\left|\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)\right| - \ln|a| + C$$

und kann den Summanden $-\ln|a|$ wieder einfach weglassen.

2) Für das letzte Integral brauchen wir wieder eine kleine Vorarbeit:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\,dx = \int \frac{1}{2\sqrt{u}}\,du = \sqrt{u} + C = \sqrt{x^2 \pm a^2} + C,$$

wobei die Substitution $u = x^2 \pm a^2$ verwendet wurde, aus der $x\,dx = \frac{1}{2}du$ folgt.

Jetzt geht es wieder richtig los. Wir verwenden einen Trick, um das Ergebnis aus (1) verwenden zu können: Wir erweitern geschickt!

$$I = \int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,\frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\,dx = \int \frac{x^2 \pm a^2}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\,dx$$

Dieses Integral können wir nun in eine Summe / Differenz aufteilen:

$$I = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\,dx \pm \int \frac{a^2}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\,dx$$

Den ersten Summanden schreiben wir geschickt als Produkt, im zweiten klammern wir das a^2 aus:

$$I = \int x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\,dx \pm a^2 \cdot \int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\,dx$$

Im ersten Integral können wir nun partiell integrieren, wobei wir die Vorarbeit von oben nutzen. Das zweite Integral ist einfach das Integral aus (1), also schon bekannt:

$$I = x \cdot \sqrt{x^2 \pm a^2} - \int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx \pm a^2 \cdot \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right|.$$

Der mittlere Summand ist wieder das ursprüngliche Integral, wir haben also mal wieder einen Phönix:

$$I = x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm a^2 \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| - I \quad |+I \quad |:2$$

und damit schließlich

$$I = \int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right|$$

Fertig.

Alternativ geht's übrigens auch so:

https://www.youtube.com/watch?v=7lPb89DqhVY

Ist aber auch nicht schneller oder einfacher, würde ich sagen…

damit dann z. B. auch:

$$I(t) := \int_0^{\pi/2} \frac{\arctan(t\,sin(x))}{\sin(x)}\,dx$$

➔

$$\dot{I}(t) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+t^2\sin^2(x)}\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin^2(x)+\cos^2(x)+t^2\sin^2(x)}\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos^2(x)+(t^2+1)\sin^2(x)}\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+(t^2+1)\tan^2(x)}\frac{1}{\cos^2(x)}\,dx$$

$u = \sqrt{t^2+1}\tan(x)$ ➔ $du = \frac{\sqrt{t^2+1}}{\cos^2(x)}dx$

$$\dot{I}(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\int_0^{\infty} \frac{1}{1+u^2}\,du = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}[\arctan(u)]_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$$

➔

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arctan(sin(x))}{\sin(x)}\,dx = I(1) = I(1) - I(0) = \int_0^1 \dot{I}(t)dt = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,dt$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}\left[\ln(1+\sqrt{2}) - \ln 1\right] = \frac{\pi}{2}\ln(1+\sqrt{2})$$