

Die beiden noch fehlenden Integrale aus der Formelsammlung

1) Zunächst brauchen wir eine kleine Vorarbeit: Wir berechnen $\int \frac{1}{\cos(u)} du$. Dafür nutzen wir den Trick, den wir im Unterricht besprochen haben: Wir substituieren $t = \sin(u)$. Dann folgt $du = \frac{dt}{\cos(u)}$ und damit

$$\int \frac{1}{\cos(u)} du = \int \frac{1}{\cos(u)} \frac{dt}{\cos(u)} = \int \frac{1}{\cos^2(u)} dt = \int \frac{1}{1 - \sin^2(u)} dt = \int \frac{1}{1 - t^2} dt.$$

Dieses Integral finden wir nun in der Formelsammlung (mit $a^2 = 1$, $x^2 = t^2$):

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sin(u)}{1-\sin(u)} \right| + C$$

Das könnte man so stehen lassen, für weiter unten ist es aber hilfreich, das noch weiter umzuformen. Dafür erweitern wir den Bruch mit $(1 + \sin(u))$, dann können wir nämlich im Nenner die 3. binomische Formel und den trigonometrischen Pythagoras ausnutzen:

$$\int \frac{1}{\cos(u)} du = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sin(u)}{1-\sin(u)} \cdot \frac{1+\sin(u)}{1+\sin(u)} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(1+\sin(u))^2}{1-\sin^2(u)} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(1+\sin(u))^2}{\cos^2(u)} \right| + C$$

Das Quadrat können wir nun auch über den kompletten Bruch schreiben und sogar außen an den Betrag hin, und dann können wir die Logarithmusrechenregel für Potenzen ausnutzen:

$$\int \frac{1}{\cos(u)} du = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sin(u)}{\cos(u)} \right|^2 + C = \frac{1}{2} \cdot 2 \ln \left| \frac{1+\sin(u)}{\cos(u)} \right| + C.$$

Nach Kürzen der Brüche bleibt schließlich:

$$\int \frac{1}{\cos(u)} du = \ln \left| \frac{1}{\cos(u)} + \tan(u) \right| + C.$$

Jetzt geht es erst richtig los mit dem gesuchten Integral aus der Formelsammlung. Zunächst klammern wir mal das a^2 aus und ziehen die Wurzel, dann wird es ein wenig einfacher:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{a^2 \left(\frac{x^2}{a^2} + 1 \right)}} dx = \int \frac{1}{|a| \sqrt{\left(\frac{x}{|a|} \right)^2 + 1}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x}{|a|} \right)^2 + 1}} \frac{dx}{|a|},$$

wobei $\sqrt{a^2} = |a|$ und $a^2 = |a|^2$ verwendet wurde. Mit der Substitution $z = \frac{x}{|a|}$, also $dz = \frac{dx}{|a|}$, bleibt dann erst mal nur noch $\int \frac{1}{\sqrt{z^2+1}} dz$.

Weiter: Aus Aufgabe 2 auf Seite 71 wissen wir, dass es bei Wurzeln aus quadratischen Termen oft sinnvoll sein kann, trigonometrische Funktionen zu substituieren: Sinus, Kosinus, Tangens, außerdem gibt es auch noch den Sekans, Kosekans und Kotangens: $\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$, $\csc(x) = \frac{1}{\sin(x)}$, $\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}$. Welche davon sinnvoll ist, sieht man nicht immer auf Anhieb, manchmal muss man einfach ein wenig rumprobieren, mit der Zeit hat man aber ein wenig Erfahrung, was klappt. Hier hilft $z = \tan(u)$ weiter, also $dz = \frac{du}{\cos^2(u)}$:

$$\int \frac{1}{\sqrt{z^2+1}} dz = \int \frac{1}{\sqrt{\tan^2(u)+1}} \frac{du}{\cos^2(u)} = \int \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2(u)}} \cos^2(u)} du = \int \frac{\sqrt{\cos^2(u)}}{\cos^2(u)} du$$

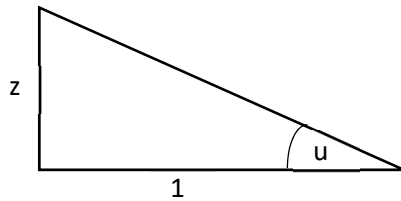
Hier ist $\cos(u) > 0$, weil in der Substitution für den \tan nur $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$ nötig ist. Damit folgt:

$$\int \frac{1}{\sqrt{z^2+1}} dz = \int \frac{\cos(u)}{\cos^2(u)} du = \int \frac{1}{\cos(u)} du,$$

und das hatten wir ja oben schon als Vorarbeit ausgerechnet! Also ist

$$\int \frac{1}{\sqrt{z^2+1}} dz = \ln \left| \frac{1}{\cos(u)} + \tan(u) \right| + C.$$

Wir wissen aus der Substitution, dass $z = \tan(u)$ ist, hier brauchen wir aber auch noch $1/\cos(u)$. Schreiben wir z als $z/1$, muss also in einem rechtwinkligen Dreieck z die Gegenkathete und 1 die Ankathete zum Winkel u sein:



Nach dem Satz von Pythagoras hat dann die Hypotenuse die Länge $\sqrt{z^2 + 1}$, also ist $\frac{1}{\cos(u)} = \frac{\sqrt{z^2+1}}{1} = \sqrt{z^2 + 1}$. Damit folgt schließlich:

$$\int \frac{1}{\sqrt{z^2+1}} dz = \ln|\sqrt{z^2 + 1} + z| + C.$$

Nun müssen wir nur noch die erste Substitution rückgängig machen und erhalten

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} dz = \ln \left| \frac{x}{|a|} + \sqrt{\left(\frac{x}{|a|}\right)^2 + 1} \right| + C$$

Den Faktor $\frac{1}{|a|}$ kann man aus der Wurzel herausziehen und ausklammern...

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} dz = \ln \left| (x + \sqrt{x^2 + a^2}) \cdot \frac{1}{|a|} \right| + C,$$

und mit einer Logarithmusrechenregel ist das dann

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} dz = \ln|(x + \sqrt{x^2 + a^2})| - \ln|a| + C.$$

Der Summand $-\ln|a|$ ist aber einfach eine Konstante, und hinten steht sowieso schon plus eine beliebige Konstante. Deshalb kann man diesen Summanden dann einfach weglassen. Fertig!

Das Integral $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} dx$ funktioniert im Prinzip ähnlich, aber man substituiert $z = \sec(u) = \frac{1}{\cos(u)}$.

Außerdem gibt es hier zusätzliche Probleme, weil nun $\cos(u)$ positiv oder negativ sein kann; beide Fälle muss man getrennt rechnen (viel Spaß!). Wenn man alles richtig macht, erhält man aber in beiden Fällen schließlich dasselbe Ergebnis

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} dz = \ln \left| (x + \sqrt{x^2 - a^2}) \right| - \ln|a| + C$$

und kann den Summanden $-\ln|a|$ wieder einfach weglassen.

2) Für das letzte Integral brauchen wir wieder eine kleine Vorarbeit:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \int \frac{1}{2\sqrt{u}} du = \sqrt{u} + C = \sqrt{x^2 \pm a^2} + C,$$

wobei die Substitution $u = x^2 \pm a^2$ verwendet wurde, aus der $x dx = \frac{1}{2} du$ folgt.

Jetzt geht es wieder richtig los. Wir verwenden einen Trick, um das Ergebnis aus (1) verwenden zu können: Wir erweitern geschickt!

$$I = \int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \int \sqrt{x^2 \pm a^2} \frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \int \frac{x^2 \pm a^2}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx$$

Dieses Integral können wir nun in eine Summe / Differenz aufteilen:

$$I = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx \pm \int \frac{a^2}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx$$

Den ersten Summanden schreiben wir geschickt als Produkt, im zweiten klammern wir das a^2 aus:

$$I = \int x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx \pm a^2 \cdot \int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx$$

Im ersten Integral können wir nun partiell integrieren, wobei wir die Vorarbeit von oben nutzen. Das zweite Integral ist einfach das Integral aus (1), also schon bekannt:

$$I = x \cdot \sqrt{x^2 \pm a^2} - \int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx \pm a^2 \cdot \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right|.$$

Der mittlere Summand ist wieder das ursprüngliche Integral, wir haben also mal wieder einen Phönix:

$$I = x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm a^2 \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| - I \quad | +I \quad | : 2$$

und damit schließlich

$$I = \int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right|$$

Fertig.