Integrale von Brüchen mit sin und cos

Gesucht wird eine allgemeine Formel für Integrale der Form $\int \frac{a\cdot\sin(x)+b\cdot\cos(x)}{c\cdot\sin(x)+d\cdot\cos(x)}dx$ mit beliebigen Koeffizienten $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. (Ok, fast beliebig – c, d dürfen natürlich nicht beide gleichzeitig gleich Null sein, und wenn a, b beide gleichzeitig gleich Null wären, dann wäre das Integral reichlich langweilig…)

Das sieht erst mal ziemlich unmöglich lösbar aus. Aber es gibt zwei Spezialfälle, in denen das Integral jeweils sehr einfach bzw. zumindest einfach wird. Der erste Spezialfall ist wirklich trivial: Mit $a = c, b = d$ haben wir einfach

$$\int \frac{c\cdot\sin(x)+d\cdot\cos(x)}{c\cdot\sin(x)+d\cdot\cos(x)}dx = \int 1\,dx = x + C.$$

Den zweiten Spezialfall erhalten wir mit $a = -d, b = c$ und können dann die Formel für $\int \frac{f'}{f}dx$ verwenden:

$$\int \frac{-d\cdot\cos(x)+c\cdot\sin(x)}{c\cdot\sin(x)+d\cdot\cos(x)}dx = \int \frac{(c\cdot\sin(x)+d\cdot\cos(x))'}{c\cdot\sin(x)+d\cdot\cos(x)}dx = \ln|c\cdot\sin(x)+d\cdot\cos(x)| + C.$$

Wie soll das aber nun helfen, eine allgemeine Formel zu finden? Nun, den allgemeinen Fall können wir nun „einfach‘‘ als eine Linearkombination dieser beiden Spezialfälle schreiben! Wir setzen also an

$$\frac{a\cdot\sin(x)+b\cdot\cos(x)}{c\cdot\sin(x)+d\cdot\cos(x)} = \alpha\cdot\frac{c\cdot\sin(x)+d\cdot\cos(x)}{c\cdot\sin(x)+d\cdot\cos(x)} + \beta\cdot\frac{-d\cdot\cos(x)+c\cdot\sin(x)}{c\cdot\sin(x)+d\cdot\cos(x)}$$

mit noch zu bestimmenden Koeffizienten α, β. Durchmultiplizieren mit dem Nenner vereinfacht die Gleichung zunächst zu

$$a\cdot\sin(x)+b\cdot\cos(x) = \alpha\cdot(c\cdot\sin(x)+d\cdot\cos(x)) + \beta\cdot(c\cdot\cos(x)-d\cdot\sin(x));$$

Klammern auflösen und zusammenfassen ergibt dann

$$a\cdot\sin(x)+b\cdot\cos(x) = (\alpha c-\beta d)\cdot\sin(x) + (\alpha d+\beta c)\cdot\cos(x).$$

Diese Gleichung kann nur dann für *alle* Werte von x richtig sein, wenn die Vorfaktoren von sin bzw. cos auf beiden Seiten gleich sind (das liegt letztlich daran, dass die Funktionen sin und cos linear unabhängig sind!), es muss also gelten:

$$\alpha c - \beta d = a; \quad \alpha d + \beta c = b$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem für α, β, das man leicht lösen kann. Die Ergebnisse sind:

$$\alpha = \frac{ac+bd}{c^2+d^2}; \quad \beta = \frac{bc-ad}{c^2+d^2}.$$

Wir haben also gezeigt, dass gilt:

$$\frac{a\cdot\sin(x)+b\cdot\cos(x)}{c\cdot\sin(x)+d\cdot\cos(x)} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2}\cdot\frac{c\cdot\sin(x)+d\cdot\cos(x)}{c\cdot\sin(x)+d\cdot\cos(x)} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\cdot\frac{-d\cdot\cos(x)+c\cdot\sin(x)}{c\cdot\sin(x)+d\cdot\cos(x)}.$$

Das sieht zwar *extrem* unübersichtlich aus – aber damit haben wir nun im Prinzip das Problem gelöst! Für das Integral ergibt sich nämlich nun:

$$\int \frac{a\cdot\sin(x)+b\cdot\cos(x)}{c\cdot\sin(x)+d\cdot\cos(x)}dx$$
$$= \frac{ac+bd}{c^2+d^2}\cdot\int\frac{c\cdot\sin(x)+d\cdot\cos(x)}{c\cdot\sin(x)+d\cdot\cos(x)}dx + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\cdot\int\frac{c\cdot\cos(x)-d\cdot\sin(x)}{c\cdot\sin(x)+d\cdot\cos(x)}dx,$$

und die beiden noch übrigen Integral sind ja einfach die oben schon besprochenen Spezialfälle! Also folgt:

$$\boxed{\int \frac{a\cdot\sin(x)+b\cdot\cos(x)}{c\cdot\sin(x)+d\cdot\cos(x)}dx = \frac{ac+bd}{c^2+d^2}\cdot x + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\cdot\ln|c\cdot\sin(x)+d\cdot\cos(x)| + C.}$$

(Die grundsätzliche Idee stammt von hier: https://www.youtube.com/watch?v=H2PtO5ayHl8;
ich habe sie nur verallgemeinert.)