

Wir betrachten uneigentliche Integrale der Form  $F_n(x) = \int \frac{1}{(x^2+1)^n} dx$  mit  $n \in \mathbb{N}$ .

Wie man Integrale dieser Form vereinfachen kann, wurde bereits in Schritt 8 besprochen in „Begründung: Zu allen gebrochenrationalen Funktionen kann man eine Stammfunktion angeben, die aus den elementaren Funktionen zusammengesetzt ist.“ (wobei  $n > 1$  vorausgesetzt wird):

$$F_n(x) = \int \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^n} dx = \int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^n} dx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^n} dx = \int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}} dx - \frac{1}{2} \int x \cdot \frac{2x}{(x^2+1)^n} dx.$$

Das erste Integral ist nun genau  $F_{n-1}(x)$ , die Potenz wurde also um 1 kleiner. Das zweite Integral kann mittels partieller Integration ausgewertet werden (vergleiche Schritte 7 und 6 im oben erwähnten Dokument):

$$u(x) = x; u'(x) = 1; v(x) = -\frac{1}{n-1} \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}; v'(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^n}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} \int x \cdot \frac{2x}{(x^2+1)^n} dx = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \left( -\frac{1}{n-1} \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}} \right) + \frac{1}{2} \frac{1}{n-1} \int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}} dx = -\frac{1}{2n-2} \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{1}{2n-2} F_{n-1}(x)$$

Damit ergibt sich insgesamt:

$$F_n(x) = F_{n-1}(x) + \frac{1}{2n-2} \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} - \frac{1}{2n-2} F_{n-1}(x) = \frac{2n-2}{2n-2} F_{n-1}(x) + \frac{1}{2n-2} \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} - \frac{1}{2n-2} F_{n-1}(x), \text{ also}$$

$$F_n(x) = \frac{2n-3}{2n-2} F_{n-1}(x) + \frac{1}{2n-2} \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}}$$

Wenn man in dieser Formel das  $n$  durch  $n-1$  ersetzt, ergibt sich:

$$F_{n-1}(x) = \frac{2(n-1)-3}{2(n-1)-2} F_{(n-1)-1}(x) + \frac{1}{2(n-1)-2} \frac{x}{(x^2+1)^{(n-1)-1}} = \frac{2n-5}{2n-4} F_{n-2}(x) + \frac{1}{2n-4} \frac{x}{(x^2+1)^{n-2}},$$

und wenn man das oben in der Formel für  $F_n(x)$  einsetzt:

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \frac{2n-3}{2n-2} \left( \frac{2n-5}{2n-4} F_{n-2}(x) + \frac{1}{2n-4} \frac{x}{(x^2+1)^{n-2}} \right) + \frac{1}{2n-2} \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} \\ &= \frac{(2n-3)(2n-5)}{(2n-2)(2n-4)} F_{n-2}(x) + \frac{2n-3}{(2n-2)(2n-4)} \frac{x}{(x^2+1)^{n-2}} + \frac{1}{2n-2} \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} \\ &= \frac{(2n-3)(2n-5)}{(2n-2)(2n-4)} F_{n-2}(x) + \frac{2n-3}{(2n-2)(2n-4)} \frac{x(x^2+1)}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-4}{(2n-2)(2n-4)} \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} \\ &= \frac{(2n-3)(2n-5)}{(2n-2)(2n-4)} F_{n-2}(x) + \frac{1}{(2n-2)(2n-4)} \frac{x[(2n-3)(x^2+1)+(2n-4)]}{(x^2+1)^{n-1}} \end{aligned}$$

Das kann man nun weiter so fortsetzen, bis man bei  $F_1(x)$  ankommt:

$$F_n(x) = \frac{(2n-3)(2n-5)\dots 1}{(2n-2)(2n-4)\dots 2} F_1(x) + \dots = \frac{1}{2^{n-1}} \frac{(2n-3)(2n-5)\dots 1}{(n-1)(n-2)\dots 1} \int \frac{1}{x^2+1} dx + \dots = \frac{1}{2^{n-1}} \frac{(2n-3)!!}{(n-1)!} + g(x) =,$$

wobei der zweite Summand  $g(x)$  eine relativ komplizierte ganzrationale Funktion ist, bei welcher der Zähler  $x$  mal eine ganzrationale Funktion vom Grad  $2n-4$  ist und der Nenner vom Grad  $2n-2$  ist – also eine echt gebrochenrationale Funktion.

Damit folgt dann insbesondere:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{1}{(x^2+1)^n} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2^{n-1}} \frac{(2n-3)!!}{(n-1)!} \arctan(x) + \dots \right]_0^b \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \frac{(2n-3)!!}{(n-1)!} \left( \lim_{b \rightarrow \infty} \arctan(b) - \arctan(0) + \lim_{b \rightarrow \infty} g(b) - \frac{0 \dots}{\dots} \right) = \frac{1}{2^{n-1}} \frac{(2n-3)!!}{(n-1)!} \left( \frac{\pi}{2} - 0 \right) \end{aligned}$$

Die Beiträge vom zweiten Summanden verschwinden: Für  $b \rightarrow \infty$  geht er gegen Null, weil der Term  $g(b)$  echt gebrochen-rational ist (s.o.), und für  $x=0$  ergibt sich Null, weil der Zähler einen Faktor  $x$  enthält (s.o.). Es bleibt also:

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x^2+1)^n} dx = \frac{(2n-3)!!}{(n-1)!} \frac{\pi}{2^n}$$

