

Den Wert von π abschätzen – mithilfe eines Integrals

Wir betrachten das Integral $\int_0^1 \frac{x^4(x-1)^4}{x^2+1} dx$. Das kann mit Standardmethoden berechnet werden:

Zunächst wird die Klammer im Zähler aufgelöst (mithilfe der passenden binomischen Formel bzw. des binomischen Lehrsatzes):

$$\int_0^1 \frac{x^4(x-1)^4}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x^4(x^4-4x^3+6x^2-4x+1)}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x^8-4x^7+6x^6-4x^5+x^4}{x^2+1} dx$$

Dann führt man eine Polynomdivision durch:

$$(x^8 - 4x^7 + 6x^6 - 4x^5 + x^4) : (x^2 + 1) = x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4 - 4 \frac{1}{x^2+1},$$

und damit

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^4(x-1)^4}{x^2+1} dx &= \int_0^1 \left(x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4 - 4 \frac{1}{x^2+1} \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{7} x^7 - \frac{2}{3} x^6 + x^5 - \frac{4}{3} x^3 + 4x - 4 \arctan(x) \right]_0^1 \\ &= \left[\frac{1}{7} - \frac{2}{3} + 1 - \frac{4}{3} + 4 - 4 \arctan(1) - 0 \right] = \frac{22}{7} - 4 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{22}{7} - \pi \end{aligned}$$

Außerdem sieht man sofort, dass das Integral einen positiven Wert ergeben muss, da ja der Integrand $\frac{x^4(x-1)^4}{x^2+1}$ wegen der geraden Exponenten sicher immer ≥ 0 ist. Also ergibt sich:

$$\frac{22}{7} - \pi > 0 \Rightarrow \pi < \frac{22}{7}$$

Wer sich jetzt fragt: „Ja, und, was soll das?!?“, der sollte wissen, dass der Bruch $\frac{22}{7}$ jahrhundertlang als gute Näherung für π verwendet wurde; hier sieht man nun, dass diese Abschätzung einen zu großen Wert liefert. (Das kann man prinzipiell auch ohne Integrale zeigen, dann wird die Rechnung aber *weit* komplizierter und länger!)

Man kann es sogar noch genauer abschätzen: Im Intervall $[0;1]$ gilt für den Nenner sicher

$$1 \leq x^2 + 1 \leq 2$$

und damit umgekehrt für den Bruch

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x^2+1} \leq 1.$$

Also folgt für das Integral:

$$\frac{1}{2} \int_0^1 x^4(x-1)^4 dx \leq \int_0^1 \frac{x^4(x-1)^4}{x^2+1} dx \leq \int_0^1 x^4(x-1)^4 dx \quad (*)$$

Das Integral vorne und hinten kann wieder einfach berechnet werden:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^4(x-1)^4 dx &= \int_0^1 (x^8 - 4x^7 + 6x^6 - 4x^5 + x^4) dx \\ &= \left[\frac{1}{9} x^9 - \frac{1}{2} x^8 + \frac{6}{7} x^7 - \frac{2}{3} x^6 + \frac{1}{5} x^5 \right]_0^1 = \frac{1}{9} - \frac{1}{2} + \frac{6}{7} - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} - 0 = \frac{1}{630}, \end{aligned}$$

und damit wird (*) zu $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{630} \leq \frac{22}{7} - \pi \leq \frac{1}{630}$. Umgestellt haben wir damit schließlich die Abschätzung

$$\frac{22}{7} - \frac{1}{630} \leq \pi \leq \frac{22}{7} - \frac{1}{1260}$$

bzw. gerundet auf fünf Dezimalen

$$3,14127 \leq \pi \leq 3,14206.$$

Das ist schon eine sehr gute Näherung! Wieder gilt dasselbe wie oben: Das könnte man auch mit anderen Methoden erreichen, dann wäre die Rechnung aber weit länger und komplizierter.

Erstmals veröffentlicht wurde diese Rechnung erst 1944 (mehr als 2000 Jahre, nachdem Archimedes mit deutlich komplizierten Methoden ähnliche Abschätzungen erhalten hatte) im „Journal of the London Mathematical Society“, durch den britischen Mathematiker Donald Percy Dalzell (1898-1988); das Integral ist deshalb auch als „Dalzells Integrall“ bekannt.

Entnommen habe ich die Rechnung aus dem Buch „Inside Interesting Integrals“, S. 23f, Springer-Verlag, 2015.