Das uneigentliche Integral über die Gauß'sche Glockenkurve

Gesucht ist der Wert des Integrals $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$.

Dafür schaut man sich das Quadrat dieses Integrals an:

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \; .$$

Der Wert der beiden Integrale hängt natürlich nicht davon ab, wie die Integrationsvariable heißt, also kann man sie im zweiten Integral auch y nennen:

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \; .$$

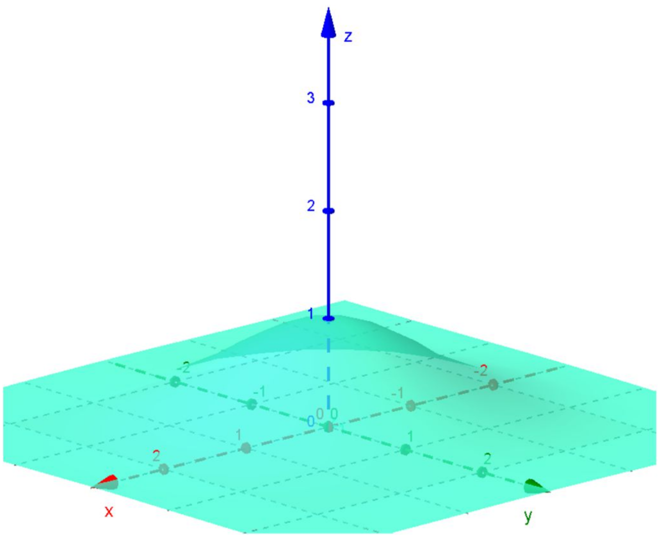
Ein Integral ist aber letztlich ja nichts anderes als der Grenzwert der Summe von Rechteckflächen, d. h. wir können schreiben

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\right)^2 = \lim_{m \to \infty} \sum_{i=0}^{n} e^{-x_i^2} \cdot \Delta x \quad \cdot \quad \lim_{n \to \infty} \sum_{j=0}^{n} e^{-y_j^2} \cdot \Delta y$$

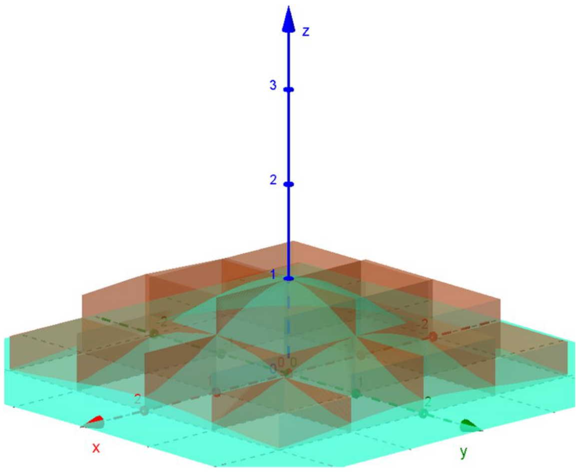
Die beiden Summen können wir dann ausmultiplizieren:

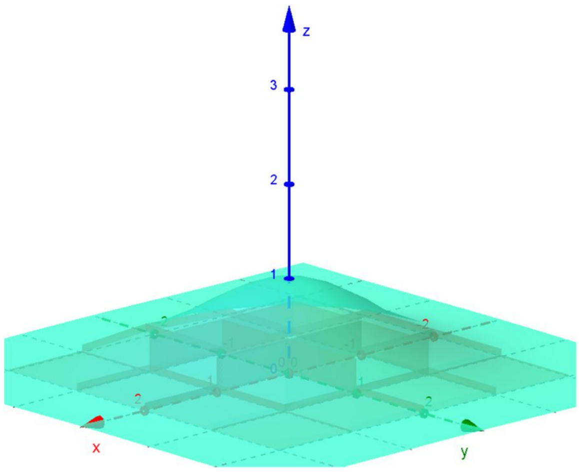
$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\right)^2 = \lim_{m \to \infty} \lim_{n \to \infty} \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{n} e^{-(x_i^2 + y_j^2)} \cdot \Delta x \cdot \Delta y$$

Die Funktion f(x,y) = $e^{-(x^2+y^2)}$, die in der Doppelsumme auftaucht, hängt nun von zwei Variablen ab; ihr Graph ist deshalb keine Kurve mehr, sondern eine Fläche, und kann nur dreidimensional, mit einer dritten Achse (z-Achse) dargestellt werden:



Das Produkt Δx·Δy ist nun der Flächeninhalt eines Rechtecks in der x-y-Ebene, und das Produkt $e^{-(x_i^2+y_j^2)} \cdot \Delta x \cdot \Delta y$ gibt deshalb das Volumen eines Quaders an. Die Doppelsumme ist also die Summe über alle Quader, die ober- bzw. unterhalb der Oberfläche liegen, die durch f(x,y) beschrieben wird – man hat wieder eine Ober- und eine Untersumme:





Bildet man die Grenzwerte $m \to \infty$ und $n \to \infty$, so ergibt sich also das Volumen des Körpers, der begrenzt wird von der x-y-Ebene und der Oberfläche, die von f(x,y) beschrieben wird:

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\right)^2 = V$$

Andererseits entsteht dieser Körper auch, wenn man den Graph von f(x) = e^{-x^2} um die z-Achse rotieren lässt - es ist ein Drehkörper! Das Volumen dieses Körpers haben wir aber bereits im Unterricht berechnet: V = π.

Also ist $\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\right)^2 = \pi$ und damit

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}\,.}$$

Etwas allgemeiner erhält man für beliebige a > 0 (z. B. mithilfe der Substitution u = ax^2):

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \; (*)$$

Daraus folgt wegen der Symmetrie zur y-Achse auch sofort $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Mit der Substitution u = x^2 bzw. x = $\sqrt{u}$ führt das auf $\int_0^{\infty} u^{-1/2} e^{-u} du = \sqrt{\pi}$. Andererseits hatten wir ja auch schon mal begründet, dass zumindest für natürliche n immer $\int_0^{\infty} u^n e^{-u} du$ = n! gilt. Das Ergebnis oben könnten wir also letztlich interpretieren als:

$$\left(-\frac{1}{2}\right)! = \sqrt{\pi}.$$

Weitere „Gauß'sche" Integrale

Wenn man das mal ausgerechnet hat, dann kann man auch weitere ähnliche Integrale berechnen, nämlich (a) $\int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-x^2} dx$ und (b) $\int_0^{\infty} x^n e^{-x^2} dx$ mit $n \in \mathbb{N}$.

Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1) n ist ungerade; dann kann man schreiben: n = 2k+1 mit $k \in \mathbb{N}$

(a) Hier ist $x^{2k+1}e^{-x^2}$ insgesamt eine ungerade Funktion (der Graph ist symmetrisch zum Ursprung). Das Integral für x < 0 ist also genau das negative des Integrals für x > 0; beide heben sich deshalb gegenseitig weg, und es bleibt einfach

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} x^{2k+1} e^{-x^2} dx = 0}.$$

(b) Für das zweite Integral substituiert man u = x^2. Dann ist x = $\sqrt{u}$ und $dx = \frac{du}{2\sqrt{u}}$; damit folgt

$$\int_0^{\infty} x^{2k+1} e^{-x^2} dx = \int_0^{\infty} \sqrt{u}^{2k+1} e^{-u} \frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \sqrt{u}^{2k} e^{-u} du = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} u^k e^{-u} du$$

Nun kann man die allgemeine Formel $\int_0^{\infty} u^k e^{-u} du = k!$ verwenden, die für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, und erhält schließlich

$$\boxed{\int_0^{\infty} x^{2k+1} e^{-x^2} dx = \frac{k!}{2}}$$

2) n gerade; dann kann man schreiben: n = 2k mit $k \in \mathbb{N}$

(a) Hier gibt es einen hübschen Trick: Wir führen eine zusätzliche Variable ein, nennen wir sie a. Dann gilt mit der Kettenregel:

$$-\frac{d}{da} e^{-ax^2} = -e^{-ax^2} \cdot \frac{d}{da}(-ax^2) = x^2 e^{-ax^2}$$

(Vorsicht: Hier wird nach a abgeleitet, nicht nach x! x wird hier erst mal als Konstante betrachtet!)

Also folgt: $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{d}{da} e^{-ax^2} dx = -\frac{d}{da} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = -\frac{d}{da}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$, wobei Ableitung und Integration vertauscht (dass das funktioniert, müsste man eigentlich noch begründen…) und dann die Formel (*) eingesetzt wurde. Es bleibt noch die Ableitung auszurechnen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = -\frac{d}{da}\sqrt{\pi} a^{-1/2} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} a^{-3/2}$$

Setzen wir am Schluss a = 1 ein, so folgt also: $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

Höhere Potenzen von x erhalten wir, indem wir einfach mehrmals nach a ableiten, z. B.:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-ax^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2}{da^2} e^{-ax^2} dx = \frac{d^2}{da^2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} = \cdots = \tfrac{3}{4}\sqrt{\pi}a^{-5/2},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^6 e^{-ax^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{d^3}{da^3} e^{-ax^2} dx = -\frac{d^3}{da^3}\sqrt{\frac{\pi}{a}} = \cdots = \tfrac{15}{8}\sqrt{\pi}a^{-5/2}.$$

Allmählich sollte man das Schema erkennen: Nachdem wir a = 1 gesetzt haben, bleibt immer ein Bruch mal $\sqrt{\pi}$ übrig. Der Bruch hat im Nenner immer eine Zweierpotenz, genauer: Wenn der Exponent von x gleich 2k ist, dann steht im Nenner immer 2^k. Im Zähler steht ein Produkt von ungeraden Zahlen, angefangen von 1 bis 2k–1; dafür gibt es auch die übliche Abkürzung (2k–1)!! („Doppelfakultät"). Insgesamt also erst mal:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2k} e^{-x^2} dx = \tfrac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k-1)}{2^k}\sqrt{\pi} = \tfrac{(2k-1)!!}{2^k}\sqrt{\pi}$$

Das könnte man so stehen lassen, man kann es aber auch noch ein wenig umschreiben. Wenn wir im Zähler das Produkt aller Zahlen bis 2k–1 hätten statt nur der ungeraden Zahlen, dann wäre das ja eine Fakultät; es fehlen aber die geraden Zahlen. Also erweitern wir den Bruch eben mit dem Produkt der fehlenden geraden Zahlen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2k} e^{-x^2} dx = \tfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2k-1)\cdot 2k}{2^k\cdot 2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2k}\sqrt{\pi}$$

Im Zähler haben wir jetzt, wie gewünscht, eine Fakultät, im Nenner dagegen nur ein Produkt aus geraden Zahlen. Aus jeder geraden Zahl können wir aber jeweils eine 2 ausfaktorisieren:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2k} e^{-x^2} dx = \tfrac{(2k)!}{2^k\cdot(2\cdot 1)\cdot(2\cdot 2)\cdot\ldots\cdot(2\cdot k)}\sqrt{\pi}$$

Das Produkt läuft von 2•1 bis 2•k, insgesamt enthält es also k Faktoren 2. Fassen wir diese alle zusammen, folgt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2k} e^{-x^2} dx = \tfrac{(2k)!}{2^k\cdot 2^k\cdot 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}\sqrt{\pi},$$

und damit haben wir auch im Nenner nun eine Fakultät! Letztlich ist also:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} x^{2k} e^{-x^2} dx = \tfrac{(2k)!}{2^{2k}\cdot k!}\sqrt{\pi}.}$$

(b) Der Integrand $x^{2k}e^{-x^2}$ ist hier insgesamt eine gerade Funktion (der Graph ist symmetrisch zur y-Achse). Die Integrale für x < 0 und für x > 0 liefern also beide denselben Wert, und deshalb ist das Integral für x > 0 genau die Hälfte des Integrals aus (a):

$$\boxed{\int_{0}^{\infty} x^{2k} e^{-x^2} dx = \tfrac{(2k)!}{2^{2k+1}\cdot k!}\sqrt{\pi}.}$$

Außerdem kann man mit dem Gauß-Integral übrigens noch viele weitere hübsche Sachen machen, z. B. die Oberfläche und das Volumen einer „Kugel" in beliebig vielen Dimensionen berechnen… dafür braucht man dann aber leider noch deutlich mehr als nur den Schulstoff.