Das Dirichlet-Integral

In Analysis II.7 hatten wir das folgende Integral mit der Phönix-Methode berechnet:

$$\int e^{-ax}\sin(x)\,dx = \frac{e^{-ax}(-a\sin(x) - cos(x))}{a^2+1}$$

➔ $\int_0^\infty e^{-ax}\sin(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-ax}\sin(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{e^{-ax}(-a\sin(x)-cos(x))}{a^2+1}\right]_0^b$

$= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{e^{-ab}(-a\sin(b)-cos(b))}{a^2+1} - \frac{1\cdot(-a\cdot 0-1)}{a^2+1}\right] = \frac{1}{a^2+1}$ für $a > 0$ (*)

Vorsicht: Man könnte jetzt auf die Idee kommen, auf beiden Seiten a = 0 zu setzen bzw. streng genommen den Grenzwert für a gegen 0 zu betrachten (weil die Formel ja nur für a > 0 hergeleitet wurde). Dann würde man erhalten:

$$\lim_{a\to 0}\int_0^\infty e^{-ax}\sin(x)\,dx = \lim_{a\to 0}\frac{1}{a^2+1} = 1.$$

Das ist soweit auch richtig. Falsch wird es, sobald man denkt, für $a \to 0$ hat man ja $e^{-ax} \to 1$, also bleibt

$$\int_0^\infty \sin(x)\,dx = 1,$$

was offensichtlich Blödsinn ist! Der Fehler liegt hier daran, dass das uneigentliche Integral ja selbst über einen Grenzwert definiert ist,

$$\lim_{a\to 0}\int_0^\infty e^{-ax}\sin(x)\,dx = \lim_{a\to 0}\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-ax}\sin(x)\,dx.$$

Man hat hier also zwei Grenzwerte – und deren Reihenfolge darf man eben ***nicht*** einfach vertauschen! Man muss ***erst*** den Grenzwert für $b \to \infty$ ausrechnen (und der funktioniert nur für a > 0, siehe oben!), ***danach*** darf man erst den Grenzwert $a \to 0$ machen! Deshalb ist

$$\int_0^\infty \sin(x)\,dx \neq \lim_{a\to 0}\int_0^\infty e^{-ax}\sin(x)\,dx.$$

Dass man die Reihenfolge der beiden Grenzwerte hier nicht vertauschen darf, liegt letztlich daran, dass das erste uneigentliche Integral eben nicht existiert.

(Ein genaues Kriterium, wann man den Grenzwert einfach unter das Integral ziehen darf, findet man hier: https://de.wikipedia.org/wiki/Satz_von_der_majorisierten_Konvergenz)

Nach diesen Vorarbeiten definieren wir

$$I(a) := \int_0^\infty e^{-ax}\frac{\sin(x)}{x}\,dx$$

und sehen zunächst, dass $\lim_{a\to\infty} I(a) = \int_0^\infty 0\cdot\frac{\sin(x)}{x}\,dx = 0$ (**) gilt. (Anmerkung: Hier darf man den Grenzwert $a \to \infty$ durchführen, weil das uneigentliche Integral existiert.) Außerdem können wir auch die Ableitung nach a berechnen (wobei man eigentlich noch begründen müsste, warum man Integration und Ableitung vertauschen darf…):

$\frac{dI(a)}{da} = \int_0^\infty \frac{d(e^{-ax})}{da} \frac{\sin(x)}{x} dx = \int_0^\infty (-xe^{-ax}) \frac{\sin(x)}{x} dx = -\int_0^\infty e^{-ax} \sin(x)\, dx = -\frac{1}{a^2+1}$ mit (*)

Jetzt leiten wir beide Seiten der Gleichung auf. Links ergibt sich einfach $I(a)$, das Integral rechts ist auch einfach. Es folgt: $I(a) = -\arctan(a) + C$

Wegen des Grenzwerts (**) folgt dann aber:

$$\lim_{a\to\infty} I(a) = -\frac{\pi}{2} + C = 0 \Rightarrow C = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I(a) = -\arctan(a) + \frac{\pi}{2}.$$

Nehmen wir nun auf beiden Seiten noch den Grenzwert für $a \to 0$ (wieder: das darf man, weil das uneigentliche Integral existiert), dann bleibt

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Dies nennt man das „Dirichlet-Integral''.

Und damit können wir auch gleich noch weiterrechnen… Wir schauen uns mal das folgende Integral, wieder abhängig von einem Parameter a, an:

$$I(a) := \int_0^\infty \frac{\sin^2(ax)}{x^2} dx$$

Wieder leiten wir nach dem Parameter ab. Wieder dürfen wir Integration und Ableitung vertauschen, weil das uneigentliche Integral existiert:

$$\frac{dI(a)}{da} = \int_0^\infty \frac{d}{da} \frac{\sin^2(ax)}{x^2} dx = \int_0^\infty \frac{2\sin(\mathrm{ax})\cos(ax) \cdot x}{x^2} dx.$$

Ein x können wir nun kürzen, und den Sinus und den Kosinus können wir zusammenfassen:

$$\frac{dI(a)}{da} = \int_0^\infty \frac{\sin(2\mathrm{ax})}{x} dx.$$

Das sieht fast schon aus wie das Dirichlet-Integral! Substitutieren wir noch u = 2ax, damit das Argument des Sinus stimmt. Dann ist du = 2a dx, also folgt $\frac{1}{x} dx = \frac{1}{u} du$, und damit ist dann einfach

$$\frac{dI(a)}{da} = \int_0^\infty \frac{\sin(\mathrm{u})}{u} du,$$

wir haben also tatsächlich das Dirichlet-Integral, d. h. die Ableitung von I(a) hängt gar nicht von a ab, sondern ist konstant:

$$\frac{dI(a)}{da} = \frac{\pi}{2}.$$

Nach Aufleiten folgt somit

$$I(a) = \frac{\pi}{2} \cdot a + C,$$

und weil $I(0) = \int_0^\infty \frac{0}{x^2} dx = 0$ ist, folgt C = 0. Damit haben wir schließlich das Ergebnis

$$I(1) = \int_0^\infty \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$