Das Dirichlet-Integral

In Analysis II.7 hatten wir das folgende Integral mit der Phönix-Methode berechnet:

$$\int e^{-ax}\sin(x)\,dx = \frac{e^{-ax}(-a\sin(x) - cos(x))}{a^2+1}$$

➔ $\int_0^\infty e^{-ax}\sin(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-ax}\sin(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{e^{-ax}(-a\sin(x)-cos(x))}{a^2+1}\right]_0^b$

$= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{e^{-ab}(-a\sin(b)-cos(b))}{a^2+1} - \frac{1\cdot(-a\cdot 0-1)}{a^2+1}\right] = \frac{1}{a^2+1}$ für $a > 0$ (*)

Vorsicht: Man könnte jetzt auf die Idee kommen, auf beiden Seiten a = 0 zu setzen bzw. streng genommen den Grenzwert für a gegen 0 zu betrachten (weil die Formel ja nur für a > 0 hergeleitet wurde). Dann würde man erhalten:

$$\lim_{a\to 0}\int_0^\infty e^{-ax}\sin(x)\,dx = \lim_{a\to 0}\frac{1}{a^2+1} = 1.$$

Das ist soweit auch richtig. Falsch wird es, sobald man denkt, für $a \to 0$ hat man ja $e^{-ax} \to 1$, also bleibt

$$\int_0^\infty \sin(x)\,dx = 1,$$

was offensichtlich Blödsinn ist! Der Fehler liegt hier daran, dass das uneigentliche Integral ja selbst über einen Grenzwert definiert ist,

$$\lim_{a\to 0}\int_0^\infty e^{-ax}\sin(x)\,dx = \lim_{a\to 0}\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-ax}\sin(x)\,dx.$$

Man hat hier also zwei Grenzwerte – und deren Reihenfolge darf man eben ***nicht*** einfach vertauschen! Man muss ***erst*** den Grenzwert für $b \to \infty$ ausrechnen (und der funktioniert nur für a > 0, siehe oben!), ***danach*** darf man erst den Grenzwert $a \to 0$ machen! Deshalb ist

$$\int_0^\infty \sin(x)\,dx \neq \lim_{a\to 0}\int_0^\infty e^{-ax}\sin(x)\,dx.$$

Dass man die Reihenfolge der beiden Grenzwerte hier nicht vertauschen darf, liegt letztlich daran, dass das erste uneigentliche Integral eben nicht existiert.

Nach diesen Vorarbeiten definieren wir

$$I(a) := \int_0^\infty e^{-ax}\frac{\sin(x)}{x}\,dx$$

und sehen zunächst, dass $\lim_{a\to\infty} I(a) = \int_0^\infty 0\cdot\frac{\sin(x)}{x}\,dx = 0$ (**) gilt. (Anmerkung: Hier darf man den Grenzwert $a \to \infty$ durchführen, weil das uneigentliche Integral existiert.) Außerdem können wir auch die Ableitung nach a berechnen (wobei man eigentlich noch begründen müsste, warum man Integration und Ableitung vertauschen darf…):

$\frac{dI(a)}{da} = \int_0^\infty \frac{d(e^{-ax})}{da}\frac{\sin(x)}{x}\,dx = \int_0^\infty (-xe^{-ax})\frac{\sin(x)}{x}\,dx = -\int_0^\infty e^{-ax}\sin(x)\,dx = -\frac{1}{a^2+1}$ mit (*)

Jetzt leiten wir beide Seiten der Gleichung auf. Links ergibt sich einfach $I(a)$, das Integral rechts ist auch einfach. Es folgt: $I(a) = -\arctan(a) + C$

Wegen des Grenzwerts (**) folgt dann aber:

$$\lim_{a\to\infty} I(a) = -\frac{\pi}{2} + C = 0 \Rightarrow C = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I(a) = -\arctan(a) + \frac{\pi}{2}.$$

Nehmen wir nun auf beiden Seiten noch den Grenzwert für $a \to 0$ (wieder: das darf man, weil das uneigentliche Integral existiert), dann bleibt

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Dies nennt man das „Dirichlet-Integral''.

Und damit können wir auch gleich noch weiterrechnen… Wir schauen uns mal das folgende Integral, wieder abhängig von einem Parameter a, an:

$$I(a) := \int_0^\infty \frac{\sin^2(ax)}{x^2} dx$$

Wieder leiten wir nach dem Parameter ab. Wieder dürfen wir Integration und Ableitung vertauschen, weil das uneigentliche Integral existiert:

$$\frac{dI(a)}{da} = \int_0^\infty \frac{d}{da}\frac{\sin^2(ax)}{x^2} dx = \int_0^\infty \frac{2\sin(\mathrm{ax})\cos(ax)\cdot x}{x^2} dx.$$

Ein x können wir nun kürzen, und den Sinus und den Kosinus können wir zusammenfassen:

$$\frac{dI(a)}{da} = \int_0^\infty \frac{\sin(2\mathrm{ax})}{x} dx.$$

Das sieht fast schon aus wie das Dirichlet-Integral! Substitutieren wir noch u = 2ax, damit das Argument des Sinus stimmt. Dann ist du = 2a dx, also folgt $\frac{1}{x}dx = \frac{1}{u}du$, und damit ist dann einfach

$$\frac{dI(a)}{da} = \int_0^\infty \frac{\sin(\mathrm{u})}{u} du,$$

wir haben also tatsächlich das Dirichlet-Integral, d. h. die Ableitung von I(a) hängt gar nicht von a ab, sondern ist konstant:

$$\frac{dI(a)}{da} = \frac{\pi}{2}.$$

Nach Aufleiten folgt somit

$$I(a) = \frac{\pi}{2}\cdot a + C,$$

und weil $I(0) = \int_0^\infty \frac{0}{x^2} dx = 0$ ist, folgt C = 0. Damit haben wir schließlich das Ergebnis

$$I(1) = \int_0^\infty \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$