Im Folgenden ist $n, m \in \mathbb{N}_0$

$$\int_0^1 x^n(1-x)^m dx = \left[x^n \cdot \frac{1}{-1}\cdot\frac{1}{m+1}(1-x)^{m+1}\right]_0^1 - \int_0^1 nx^{n-1} \cdot \frac{1}{-1}\cdot\frac{1}{m+1}(1-x)^{m+1}dx$$

$$= -1^n\frac{1}{m+1}0^{m+1} + 0^n\frac{1}{m+1}1^{m+1} + \frac{n}{m+1}\int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{m+1}dx$$

$$= \frac{n}{m+1}\int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{m+1}dx$$

Führt man weitere partielle Integrationen durch, dann sieht man: mit jeder nimmt der Exponent von x um 1 ab und der von (1-x) um 1 zu. Man erhält jeweils einen Bruch mit dem Exponenten von x im Zähler und dem von (1-x) im Nenner. Das kann man so lange machen, bis man bei x^0 ankommt, also n mal. Es bleibt:

$$\int_0^1 x^n(1-x)^m dx = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 1}{(m+1)\cdot(m+2)\cdot\ldots\cdot(m+n)}\int_0^1 x^0(1-x)^{m+n}dx$$

$$= \frac{n!}{\frac{(m+n)!}{m!}}\int_0^1 (1-x)^{m+n}dx = \frac{n!m!}{(m+n)!}\left[\frac{1}{-1}\cdot\frac{1}{m+n+1}(1-x)^{m+n+1}\right]_0^1$$

$$= \frac{n!m!}{(m+n)!\cdot(m+n+1)}\left[-(1-x)^{m+n+1}\right]_0^1 = \frac{n!m!}{(m+n+1)!}\left[-0^{m+n+1}+1^{m+n+1}\right] = \frac{n!m!}{(m+n+1)!}\cdot 1,$$

also:

$$\boxed{\int_0^1 x^n(1-x)^m dx = \frac{n!\,m!}{(n+m+1)!}}$$

(Anmerkung: für n = p-1, m = q-1 nennt man dies auch die ,,Betafunktion‘‘ B(p,q). Diese ist prinzipiell für beliebige positive reelle Zahlen definiert, nicht nur für natürliche Zahlen.)

Außerdem kann man auch noch x = $\sin^2$(u) substituieren ➔ dx = 2 sin(u) cos(u) du; Grenzen umrechnen nicht vergessen! Damit folgt:

$$\int_0^1 x^n(1-x)^m dx = \int_0^{\pi/2} (\sin^2(u))^n(1-\sin^2(u))^m \cdot 2\sin(u)\cos(u)\,du$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} (\sin(u))^{2n}(\cos(u))^{2m}\cdot\sin(u)\cos(u)\,du,$$

also:

$$\boxed{\int_0^{\pi/2} (\sin(u))^{2n+1}(\cos(u))^{2m+1}du = \frac{n!\,m!}{2(n+m+1)!}}$$