Einige Formeln zum Goldenen Schnitt

Eine Strecke wird im Verhältnis Φ geteilt, wenn das Verhältnis der Gesamtstrecke m+M zur längeren Teilstrecke M gleich dem Verhältnis der längeren Teilstrecke M zur kürzeren Teilstrecke m ist. Aus dieser Definition ergibt sich:

$$\Phi = \frac{M}{m} = \frac{m+M}{M} = \frac{m}{M} + 1 = \frac{1}{\Phi} + 1 \implies \Phi^2 = \Phi + 1$$

Damit kann man auch höhere Potenzen von Φ vereinfachen, z. B.:

$$\Phi^3 = \Phi \cdot \Phi^2 = \Phi \cdot (\Phi + 1) = \Phi^2 + \Phi = \Phi + 1 + \Phi = 2\Phi + 1$$

Ebenso ergibt sich:

$$\Phi^4 = 3\Phi + 2$$

$$\Phi^5 = 5\Phi + 3,$$

(Anmerkung: die hier auftretenden Zahlen heißen auch *Fibonacci-Zahlen*) und außerdem auch

$$2 - \frac{1}{\Phi^2} = \Phi \iff \frac{1}{\Phi^2} = 2 - \Phi$$

Löst man die quadratische Gleichung für Φ, so ergibt sich:

$$\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

Damit kann man dann z. B. auch zeigen:

$$\sqrt{5}\,\Phi = \Phi + 2$$

$$\frac{\sqrt{5}}{\Phi} = 3 - \Phi$$

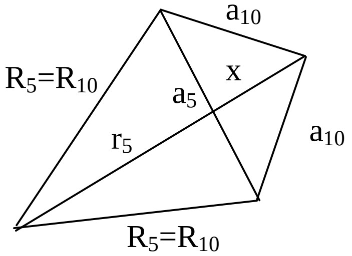
$$1 - \frac{\Phi}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\Phi + 2}$$

Außerdem ist noch zu beachten, dass bei sogenannten Goldenen Dreiecken das Verhältnis der Schenkel zur Grundkantenlänge gerade Φ beträgt, und dass das Verhältnis der Diagonale eines regulären Fünfecks zur Kantenlänge ebenfalls genau Φ ist.

Vorarbeit: Um- und Inkreisradius und Flächeninhalt eines regulären Fünfecks

für ein reguläres Zehneck (Kantenlänge a_{10}) gilt: Umkreisradius $R_{10} = a_{10}\,\Phi$
(Ein reguläres Zehneck besteht aus 10 Goldenen Dreiecken!)

Zusammenhang zwischen regulärem Zehneck und Fünfeck:



(1) $r_5 + x = R_{10} = R_5$

(2) $(r_5)^2 + (a_5/2)^2 = (R_5)^2$

(3) $x^2 + (a_5/2)^2 = (a_{10})^2 = (R_{10}/\Phi)^2 = (R_5/\Phi)^2$

(1) in (3): $(R_5-r_5)^2 + (a_5/2)^2 = (R_5/\Phi)^2$

- (2): $(R_5-r_5)^2 - (r_5)^2 = (R_5/\Phi)^2 - (R_5)^2$

$(R_5)^2 - 2 R_5 r_5 + (r_5)^2 - (r_5)^2 = (R_5)^2/\Phi^2 - (R_5)^2 \qquad | + (R_5)^2$

$2 (R_5)^2 - 2 R_5 r_5 = (R_5)^2/\Phi^2 \qquad | : R_5$

$2 R_5 - 2 r_5 = R_5/\Phi^2 \qquad | + 2 r_5 - R_5/\Phi^2$

$2 r_5 = 2 R_5 - R_5/\Phi^2 \qquad | : 2$

(4) $r_5 = R_5 - R_5/(2\Phi^2) = R_5/2\ (2 - 1/\Phi^2) = \dfrac{\Phi}{2} R_5$

in (2): $(R_5\ \Phi/2)^2 + (a_5/2)^2 = (R_5)^2$

$(R_5)^2\ \Phi^2 / 4 + (a_5)^2 / 4 = (R_5)^2 \qquad | \cdot 4$

$(R_5)^2\ \Phi^2 + (a_5)^2 = 4 (R_5)^2 \qquad | - (R_5)^2\ \Phi^2$

$(a_5)^2 = 4 (R_5)^2 - (R_5)^2\ \Phi^2 = (R_5)^2\ (4 - \Phi^2)$

$= (R_5)^2\ (4 - \Phi - 1) = (R_5)^2\ (3 - \Phi) = (R_5)^2\ \dfrac{\sqrt{5}}{\Phi} \qquad | \cdot \dfrac{\Phi}{\sqrt{5}}$

$(R_5)^2 = (a_5)^2\ \dfrac{\Phi}{\sqrt{5}} \qquad | \sqrt{\ }$

$$\boxed{R_5 = a_5 \sqrt{\frac{\Phi}{\sqrt{5}}}}$$

in (4): $r_5 = \dfrac{\Phi}{2} a_5 \sqrt{\dfrac{\Phi}{\sqrt{5}}}$

$$\boxed{r_5 = \frac{a_5}{2} \sqrt{\frac{\Phi^3}{\sqrt{5}}}}$$

Flächeninhalt: Ein reguläres Sechseck besteht aus 5 gleichschenkligen Dreiecken mit Grundkante a und Höhe r_5 ==> $A_5 = 5 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot a_5 \cdot \dfrac{a_5}{2} \sqrt{\dfrac{\Phi^3}{\sqrt{5}}}$

$$\boxed{A_5 = \frac{1}{4}(a_5)^2 \sqrt{\left(\sqrt{5}\Phi\right)^3} = \frac{1}{4}(a_5)^2 \sqrt{(\Phi + 2)^3}}$$

Volumen und Oberflächeninhalt eines Ikosaeders

Die Oberfläche besteht aus 20 gleichseitigen Dreiecken der Seitenlänge a und Flächeninhalt G_3

==> $O = 20 \cdot G_3 = 20 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{4} a^2$

$$\boxed{O = 5\sqrt{3}\, a^2}$$

Das Ikosaeder selbst besteht aus 20 regulären dreiseitigen Pyramiden mit Grundkantenlänge a, Seitenkantenlänge R (Umkugelradius des Ikosaeders) und Höhe r (Inkugelradius des Ikosaeders)

==> $V = 20 \cdot \dfrac{1}{3} \cdot G_3 \cdot r = \dfrac{1}{3} \cdot O \cdot r$

O wurde oben ausgerechnet, fehlt noch r. In einer der Pyramiden kann man aber wieder den Satz des Pythagoras anwenden (rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenuse R und Katheten r und R_3 = $\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{3}a$ (Umkreisradius des gleichseitigen Dreiecks)):

$$r^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2 = R^2$$

$$r^2 = R^2 - \frac{1}{3}a^2$$

Fehlt also noch R... Das ist leider noch etwas komplizierter.

Bezeichne mit M den Mittelpunkt des Ikosaeders. Der obere Teil des Ikosaeders ist eine reguläre fünfseitige Pyramide; bezeichne ihre Ecken mit A, B, C, D, E, ihre Spitze mit S, ihren Höhenfußpunkt mit H (ihre Höhe ist dann $h = \overline{HS}$). Außerdem liegt im Ikosaeders auch noch die reguläre fünfseitige Pyramide ABCDEM mit demselben Höhenfußpunkt H und der Höhe $\overline{MH}$.

Dann gilt:

(1) $\overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MC} = \overline{MD} = \overline{ME} = \overline{MS} = R$ (nach Definition des Umkugelradius)

(2) $\overline{MH} + \overline{HS} = \overline{MS} = R$

(3) $\overline{HS}^2 + (R_5)^2 = a^2$ (rechtwinkliges Dreieck in der Pyramide ABCDES)

(4) $\overline{MH}^2 + (R_5)^2 = R^2$ (rechtwinkliges Dreieck in der Pyramide ABCDEM)

aus (3) und (4) ergibt sich:

$$R^2 = a^2 + \overline{MH}^2 - \overline{HS}^2$$

mit (2):

$$R^2 = a^2 + \left(R - \overline{HS}\right)^2 - \overline{HS}^2 = a^2 + R^2 - 2R\overline{HS} + \overline{HS}^2 - \overline{HS}^2 \qquad | - R^2$$

$$0 = a^2 - 2R\overline{HS} \qquad | + 2R\overline{HS}$$

$$2R\overline{HS} = a^2 \qquad | : 2\overline{HS}$$

$$R = \frac{a^2}{2\overline{HS}}$$

andererseits erhält man aus (3):

$$\overline{HS} = \sqrt{a^2 - (R_5)^2} = \sqrt{a^2 - \left(a\sqrt{\frac{\Phi}{\sqrt{5}}}\right)^2} = \sqrt{a^2 - a^2\frac{\Phi}{\sqrt{5}}} = a\sqrt{1 - \frac{\Phi}{\sqrt{5}}}$$

also ergibt sich:

$$R = \frac{a}{2\sqrt{1 - \frac{\Phi}{\sqrt{5}}}} = \frac{a}{2}\sqrt{\Phi + 2}$$

oben eingesetzt folgt:

$$r^2 = \left(\frac{a}{2}\sqrt{\Phi + 2}\right)^2 - \frac{1}{3}a^2 = \frac{a^2}{4}(\Phi + 2) - \frac{1}{3}a^2 = \frac{a^2}{12}\left[3(\Phi + 2) - 4\right]$$

$$=\frac{a^2}{12}\left[3\Phi+2\right]=\frac{a^2}{12}\Phi^4, \qquad \text{also} \qquad r=\frac{a}{\sqrt{12}}\Phi^2=\frac{a}{2\sqrt{3}}\Phi^2$$

eingesetzt in die Volumenformel ganz am Anfang, außerdem O einsetzen:

$$V=\frac{1}{3}\cdot 5\sqrt{3}a^2\cdot\frac{a}{2\sqrt{3}}\Phi^2$$

vereinfachen:

$$\boxed{V=\frac{5}{6}\Phi^2a^3=\frac{5}{6}(\Phi+1)a^3=\frac{5}{12}\left(3+\sqrt{5}\right)a^3}$$

<u>Volumen und Oberflächeninhalt eines Dodekaeders</u>

Die Oberfläche besteht aus 12 regulären Fünfecken der Kantenlänge a, also:

$$O=12\cdot A_5=12\cdot\frac{1}{4}a^2\sqrt{\left(\sqrt{5}\Phi\right)^3}$$

$$\boxed{O=3a^2\sqrt{\left(\sqrt{5}\Phi\right)^3}=3a^2\sqrt{(\Phi+2)^3}}$$

Wie oben ergibt sich zunächst:

$$V=\frac{1}{3}\cdot O\cdot r,$$

und wieder fehlt der Inkugelradius r. Mit dem Satz des Pythagoras, angewendet auf ein passendes rechtwinkliges Dreieck in einer der 12 regulären fünfseitigen Pyramiden, aus denen das Dodekaeder besteht, gilt:

$$(R_5)^2+r^2=R^2, \qquad \text{also:} \qquad r^2=R^2-(R_5)^2=R^2-a^2\frac{\Phi}{\sqrt{5}}$$

Um R zu berechnen, kann man ähnlich wie beim Ikosaeder vorgehen. Betrachte hier die zwei regulären dreiseitigen Pyramiden, die von vier aneinander angrenzenden Ecken bzw. von drei dieser Ecken und dem Mittelpunkt des Dodekaeder gebildet werden. Bezeichnet S die Spitze der ersteren Pyramide und H den (gemeinsamen) Höhenfußpunkt der beiden Pyramiden, so folgt wie oben:

$$R=\frac{a^2}{2\overline{HS}}$$

Hier gilt allerdings nun:

$$\overline{HS}^2+\left(R_3\right)^2=a^2,$$

wobei R_3 nun den Umkreisradius der gemeinsamen Grundfläche der Pyramiden (gleichseitiges Dreieck) bezeichnet. Die Seiten dieses gleichseitigen Dreiecks werden durch Diagonalen d dreier Fünfecke gebildet. Damit ist dann der Umkreisradius des Dreiecks:

$$R_3=\frac{\sqrt{3}}{3}d=\frac{\sqrt{3}}{3}a\Phi$$

Es ergibt sich also:

$$\overline{HS}=\sqrt{a^2-\left(R_3\right)^2}=\sqrt{a^2-\frac{1}{3}a^2\Phi^2}=\sqrt{\frac{a^2}{3}\left(3-\Phi^2\right)}=\sqrt{\frac{a^2}{3}\left(2-\Phi\right)}=\sqrt{\frac{a^2}{3\Phi^2}}=\frac{a}{\sqrt{3\Phi}},$$

Oben eingesetzt folgt damit für den Umkugelradius:

$$R = \frac{a^2}{2\frac{a}{\sqrt{3}\Phi}} = \frac{\sqrt{3}}{2} a\Phi$$

Für den Inkugelradius ergibt sich dann:

$$r^2 = \frac{3}{4} a^2 \Phi^2 - a^2 \frac{\Phi}{\sqrt{5}} = \frac{a^2}{4\sqrt{5}} \left(3\sqrt{5}\Phi \cdot \Phi - 4\Phi\right) = \frac{a^2}{4\sqrt{5}} \left(3(\Phi + 2)\Phi - 4\Phi\right)$$

$$= \frac{a^2}{4\sqrt{5}} \left(3\Phi^2 + 2\Phi\right) = \frac{a^2}{4\sqrt{5}} (5\Phi + 3) = \frac{a^2}{4\sqrt{5}} \Phi^5$$, also r = $\frac{1}{2} a \sqrt{\frac{\Phi^5}{\sqrt{5}}}$

eingesetzt in die Volumenformel hat man also schließlich:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 3a^2 \sqrt{\left(\sqrt{5}\Phi\right)^3} \cdot \frac{1}{2} a \sqrt{\frac{\Phi^5}{\sqrt{5}}} = \frac{1}{2} a^3 \sqrt{\frac{\left(\sqrt{5}\Phi^2\right)^3 \Phi^2}{\sqrt{5}}} = \frac{1}{2} a^3 \sqrt{5\Phi^8}$$

$$\boxed{V = \frac{\sqrt{5}}{2} \Phi^4 a^3 = \frac{\sqrt{5}}{2} (3\Phi + 2) a^3 = \frac{1}{4} \left(15 + 7\sqrt{5}\right) a^3}$$