

Robin, der perfekte Schütze – oder: Hypothesentests beim Darts-Spiel

Robin behauptet, er würde beim Darts-Spielen im Schnitt in 40% der Würfe das „Bull’s Eye“ (genau in die Mitte) treffen. Da er als Angeber bekannt ist, glauben Sie ihm das natürlich nicht – er soll das doch bitte mal vormachen!

Robin wirft also 100 mal – und trifft immerhin 35 mal das Bull’s Eye! Eine gute Leistung – aber die 40% waren wohl doch etwas übertrieben – oder?

Robin protestiert: „Moment, ich habe doch nur gesagt, dass ich *im Schnitt* in 40% der Fälle treffe! Dass es diesmal nur 35% waren, könnte doch eine rein zufällige Abweichung sein!“

Ob so eine Abweichung rein zufällig sein kann, können Sie ja nachschauen. Also zücken Sie Ihr Tafelwerk (warum auch immer Sie das beim Darts-Spielen dabei haben...) und schlagen nach: Robin behauptet eine Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0,4$; die Anzahl der Würfe war $n = 100$. Die Wahrscheinlichkeit, dass er zufällig höchstens 35 mal trifft, ergibt sich aus dem Tafelwerk dann zu $P(X \leq 35) \approx 0,0001$. Wenn Sie also auf Grund dieses Ergebnisses schlussfolgern, dass er in Wirklichkeit weniger als in 40% der Fälle trifft, dann irren Sie sich mit einer Wahrscheinlichkeit von immerhin $0,0001$ %. Das ist relativ hoch – die Abweichung von seiner behaupteten durchschnittlichen Trefferquote könnte also wirklich rein zufällig gewesen sein!

Um sicher zu gehen, lassen Sie ihn noch weitere 100 mal werfen; diesmal trifft er sogar nur 33 mal. Insgesamt ist jetzt also $n = 200$, $p = 0,4$ ist immer noch seine Behauptung (die Nullhypothese), und die Testgröße T ist „Anzahl der Bull’s Eye-Treffer bei 200 Würfeln“. Insgesamt waren es hier $k = 68$ Treffer. Wieder immer Tafelwerk nachschauen: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Ergebnis „ $T \leq 68$ “ rein zufällig war, ist nur noch $0,000001$. Wenn Sie also auf Grund dieses Ergebnisses schlussfolgern, dass er in Wirklichkeit in weniger als 40% der Fälle trifft (Gegenhypothese), dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie sich irren (also die Irrtumswahrscheinlichkeit) nur noch $0,000001$ %.

Robin ist inzwischen recht kleinlaut geworden. Trotzdem meint er: „Das könnte doch immer noch zufällig sein! Auch wenn die Wahrscheinlichkeit recht klein ist...“. Also fragen Sie ihn, ab welcher Irrtumswahrscheinlichkeit er denn akzeptieren würde, dass er wohl doch nicht so gut ist.

Robin will sicher gehen und sagt, die Irrtumswahrscheinlichkeit soll kleiner als 1% sein (das Signifikanzniveau dieses linksseitigen Signifikanztests soll also 1% sein). Robin will außerdem noch mal von vorne anfangen – die bisherigen Ergebnisse sollen nicht zählen, weil er sich angeblich nicht richtig konzentrieren konnte. Er will wieder insgesamt 100 mal werfen und fragt Sie, bis zu wie vielen erzielten Treffern Sie seine Behauptung ablehnen würden (er fragt also nach dem Ablehnungsbereich der Nullhypothese).

Sie zücken wieder das Tafelwerk und überlegen: das Signifikanzniveau soll 1% sein, die Irrtumswahrscheinlichkeit darf also höchstens 1% sein. Mit anderen Worten: die Wahrscheinlichkeit, dass Robins erzieltes Ergebnis rein zufällig ist, darf höchstens 1% sein. Gesucht ist also die höchste Trefferanzahl k , für die in der rechten Spalte (für $n = 100$, $p = 0,4$) ein Wert kleiner gleich 0,01 steht. Nachschauen ergibt: $k = 35$; der Ablehnungsbereich ist also: $T \leq 35$.

Andersherum: damit man Robins Behauptung akzeptiert, müsste er mindestens 36 Treffer erzielen; der Annahmebereich der Nullhypothese ist hier also: $T \geq 36$.

0,17947
0,04748
28