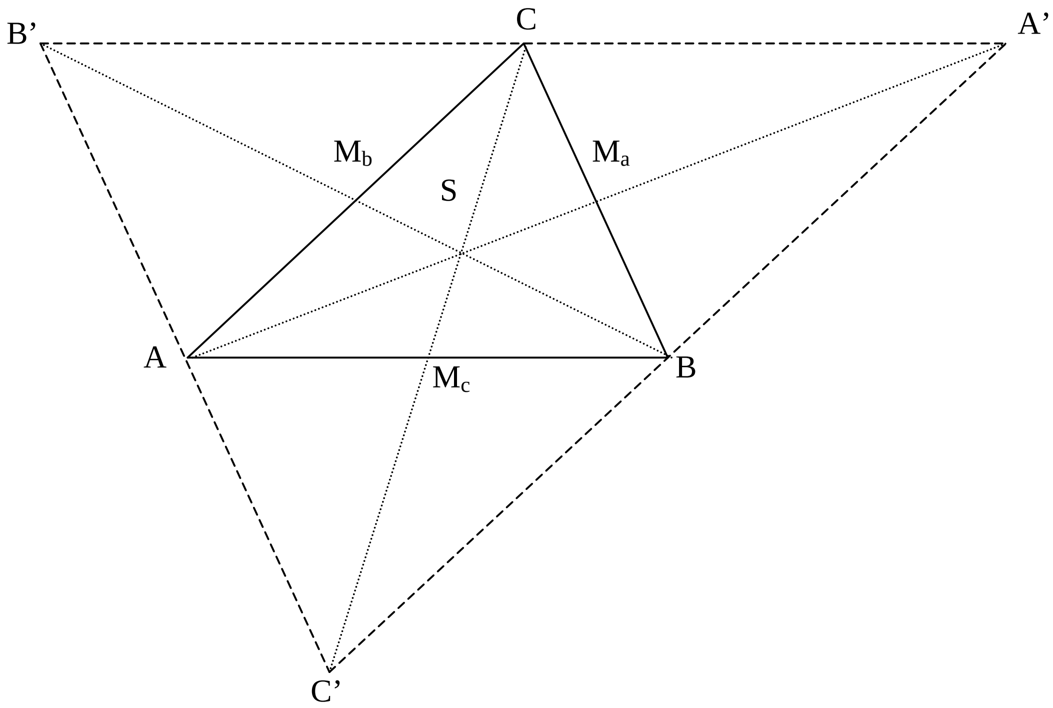
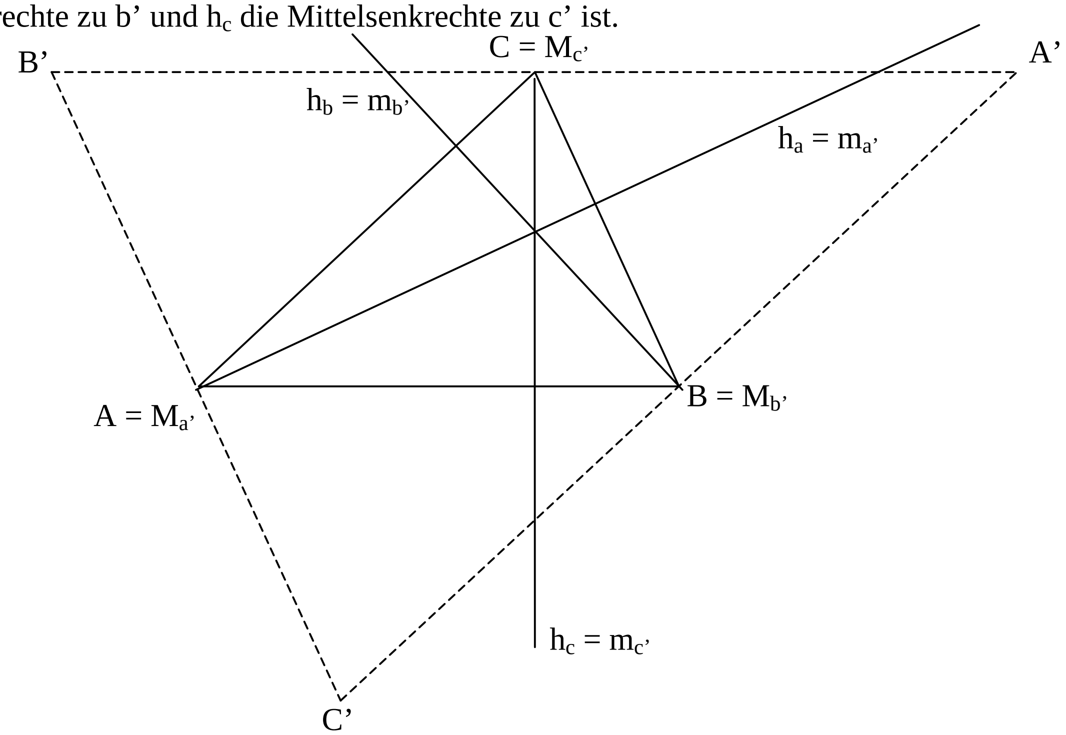
1. Führe eine zentrische Streckung des Dreiecks ABC mit Zentrum S (Schwerpunkt) und Streckfaktor –2 durch ➔ für alle Punkte P und ihre Bildpunkte P' gilt $\overrightarrow{SP'} = -2 \cdot \overrightarrow{SP}$.



Insbesondere ist auch $\overrightarrow{SM_a}' = -2 \cdot \overrightarrow{SM_a}$. Weil der Abstand von S zu A doppelt so groß ist wie der Abstand von S zu M_a (Eigenschaft des Schwerpunkts!) und A und M_a auf verschiedenen Seiten von S liegen, ist aber auch $\overrightarrow{SA} = -2 \cdot \overrightarrow{SM_a}$. Also ist A der Bildpunkt M_a' von M_a. Weil bei zentrischen Streckungen Längenverhältnisse gleich bleiben, folgt, dass A der Mittelpunkt $M_{a'}$ der Bildstrecke a' ist. Ebenso begründet man, dass B der Mittelpunkt $M_{b'}$ der Bildstrecke b' und C der Mittelpunkt $M_{c'}$ der Bildstrecke c' ist. *(Vorsicht: Dass $M_a' = M_{a'}$ ist, gilt nur bei Abbildungen, die längenverhältnistreu sind!)*

Die Höhe h_a ist senkrecht zu a. Weil bei zentrischen Streckungen Winkelgrößen gleich bleiben, ist h_a also auch senkrecht zu a'. Außerdem verläuft h_a durch A, also durch den Mittelpunkt von a'. Also ist h_a im neuen Dreieck A'B'C' die Mittelsenkrechte zu a'. Ebenso begründet man, dass im neuen Dreieck h_b die Mittelsenkrechte zu b' und h_c die Mittelsenkrechte zu c' ist.



Da sich die drei Mittelsenkrechten jedes Dreiecks in seinem Umkreismittelpunkt schneiden, folgt: h_a, h_b und h_c schneiden sich in einem Punkt – nämlich dem Umkreismittelpunkt von A'B'C'. w.z.z.w.

2. Eben wurde gezeigt: $H = U_{A'B'C'}$

Außerdem wurde oben schon begründet, dass die Mittelpunkte $M_{a'}$, $M_{b'}$, $M_{c'}$ gleich den Punkten A, B, C sind und diese wiederum die Bildpunkte von M_a, M_b, M_c bei der obigen zentrischen Streckung. Da außerdem bei der zentrischen Streckung die Winkelgrößen gleich bleiben, folgt, dass die Mittelsenkrechten $m_{a'}$, $m_{b'}$, $m_{c'}$ die Bilder der Mittelsenkrechte m_a, m_b, m_c bei der obigen zentrischen Streckung sind. Also ist der Umkreismittelpunkt $U_{A'B'C'}$ der Bildpunkt des Umkreismittelpunkts U_{ABC} bei dieser zentrischen Streckung. Es folgt: $\overrightarrow{SU_{A'B'C'}} = -2 \cdot \overrightarrow{SU_{ABC}}$.

Also ist insgesamt $\overrightarrow{SH} = -2 \cdot \overrightarrow{SU_{ABC}}$. Damit folgt: S, U_{ABC} und H liegen auf einer Geraden; H liegt dabei doppelt soweit von S entfernt wie U_{ABC} und auf der anderen Seite von S. w.z.z.w.