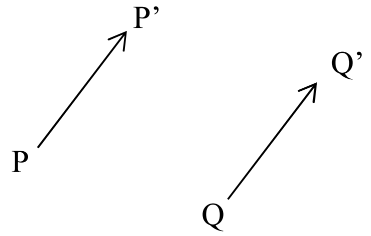
Grundwissen zu Vektoren

In der Physik versteht man unter einem Vektor eine Größe, die einen Betrag und eine Richtung hat, z. B. Geschwindigkeit, Beschleunigung, Kraft, ... In der Mathematik ist die allgemeine Definition eines Vektors komplizierter und abstrakter; für unsere Zwecke ist aber folgendes ausreichend: In der Geometrie stellt ein Vektor eine Verschiebung (Translation) dar.

Bei einer Verschiebung der Ebene wird jeder Punkt P, Q, ... auf einen Bildpunkt P', Q', ... abgebildet:



Die Strecken [PP'], [QQ'], ... sind alle gleich lang und parallel, außerdem haben sie dieselbe Richtung. Durch Angabe einer einzigen solchen gerichteten Strecke (ein Pfeil) ist die Verschiebung also eindeutig dargestellt. Das führt zu folgenden Definitionen:

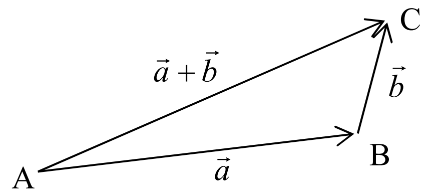
1) Ein Vektor ist die Menge aller Pfeile gleicher Richtung und gleicher Länge.
2) Jeder einzelne dieser Pfeile heißt ein Repräsentant dieses Vektors.
3) Zwei Vektoren sind genau dann gleich, wenn sie dieselben Repräsentanten haben.

Anmerkungen:

- Meist unterscheidet man nicht streng zwischen Vektor und Pfeil.
- Man bezeichnet Vektoren oft mit Kleinbuchstaben: $\vec{a}$, $\vec{b}$, ...
- Will man ausdrücken, dass ein Repräsentant des Vektors ein Pfeil von einem Punkt P zu einem Punkt Q ist, so schreibt man für den Vektor auch $\overrightarrow{PQ}$.

(Zeichnerische) Addition von Vektoren:

Definition: Setzt man einen Pfeil eines Vektors $\vec{b}$ ans Ende eines Pfeils eines Vektors $\vec{a}$ an, so repräsentiert der Pfeil vom Anfangspunkt von $\vec{a}$ zum Endpunkt von $\vec{b}$ den Vektor $\vec{a}+\vec{b}$. Man bezeichnet diesen Vektor als Summe der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.



Aus der Skizze sieht man, dass allgemein also folgendes gilt:

$$\boxed{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}}$$

Speziell ergibt sich auch, falls C = A ist: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}$. Der Vektor $\overrightarrow{AA}$ vom Punkt A zu sich selbst hat offensichtlich die Länge 0; außerdem sieht man, dass der Vektor $\overrightarrow{BA}$ genau entgegengesetzt zum Vektor $\overrightarrow{AB}$ verläuft, aber dieselbe Länge hat. Das führt zu folgenden Definitionen.

1) Ein Vektor der Länge Null heißt Nullvektor $\vec{0}$.
2) Ein Vektor, der entgegengesetzt zu einem Vektor $\vec{a}$ ist, aber gleich lang, heißt Gegenvektor $-\vec{a}$.

Man hat also immer: $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}$

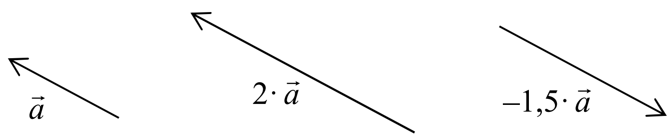
Rechenregeln:

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (es ist egal, ob man $\vec{b}$ ans Ende von $\vec{a}$ setzt oder umgekehrt; dies ist das Kommutativgesetz der Vektoraddition)
2) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (es ist egal, ob man erst $\vec{b}$ an das Ende von $\vec{a}$ setzt und dann ans Ende des Summenvektors noch $\vec{c}$, oder ob man erst $\vec{c}$ an das Ende von $\vec{b}$ setzt und dann den Summenvektor ans Ende von $\vec{a}$; dies ist das Assoziativgesetz der Vektoraddition)

Anmerkung: Mit Hilfe des Satzes von Pythagoras und von Sinus- und Kosinussatz kann man die Längen von Summenvektoren und die Winkel zwischen Vektoren auch berechnen.

(Zeichnerische) S-Multiplikation von Vektoren:

Definition: Ein Vektor, der λ-mal so lang ist (λ > 0) wie ein Vektor $\vec{a}$, aber dieselbe Richtung hat, wird mit $\lambda\cdot\vec{a}$ bezeichnet; hat er die entgegengesetzte Richtung, mit $-\lambda\cdot\vec{a}$.



Insbesondere gilt: $1\cdot\vec{a} = \vec{a}$; $-1\cdot\vec{a} = -\vec{a}$; $0\cdot\vec{a} = \vec{0}$

Anmerkungen:

- Wie üblich kann man den Malpunkt auch weglassen, also z. B. $2\vec{a}$ statt $2\cdot\vec{a}$ schreiben.
- Hier ist die Multiplikation einer Zahl mit einem Vektor definiert; nicht definiert ist (bisher) die Multiplikation eines Vektors mit einem Vektor. Auch kann durch Vektoren nicht geteilt werden!
- Durch die Multiplikation mit einer Zahl wird die Länge eines Vektors geändert, er wird also „skaliert"; deshalb nennt man Zahlen in diesem Zusammenhang auch Skalare.

Rechenregeln:

1) $(\lambda\cdot\mu)\cdot\vec{a} = \lambda\cdot(\mu\cdot\vec{a})$ (Assoziativgesetz der skalaren Multiplikation; beachte: hier handelt es sich eigentlich um zwei verschiedene Multiplikationen, nämlich in der Klammer vorne die Multiplikation zweier Zahlen, sonst die Multiplikation einer Zahl mit einem Vektor!)
2) $(\lambda + \mu)\cdot\vec{a} = \lambda\cdot\vec{a} + \mu\cdot\vec{a}$ (1. Distributivgesetz)
3) $\lambda\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\cdot\vec{a}+\lambda\cdot\vec{b}$ (2. Distributivgesetz)

Beachte: Mit den Rechenregeln kann man nun (lineare) Vektorgleichungen genauso lösen wie normale Gleichungen.

Linearkombinationen:

Definition: Eine Summe von Vielfachen von Vektoren, also
$$\lambda\cdot\vec{a} + \mu\cdot\vec{b} + \ldots$$
bezeichnet man als Linearkombination dieser Vektoren.

Anmerkungen:

1) Von „Linearkombinationen" kann man auch in anderen Zusammenhängen sprechen, z. B. Linearkombination von Gleichungen (z. B.: $2\cdot\mathrm{I} - 3\cdot\mathrm{II}$), Linearkombination von Potenzen (z. B.: $1{,}3\cdot x^5 - \pi\cdot x^2$), Linearkombination von Funktionen (z. B.: $\sqrt{2}\cdot f - 3\cdot g$) usw.
2) Damit kann man den Begriff „Vektor" dann auch verallgemeinern: In der Mathematik versteht man unter Vektoren prinzipiell alle Objekte, von denen man jeweils sinnvoll Linearkombinationen bilden kann.