Grundwissen zu Exponentialfunktionen

a) Potenzen und Potenzgesetze

erinnere: $a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (n Faktoren) für $n \in \mathbb{N}$; $a^1 = a$; $a^0 = 1$

Dabei heißt a die Basis, n der Exponent.

Rechengesetze: (im Folgenden sind $a,b \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}$ und $x,y \in \mathbb{R}$) *(FS!)*

1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ 2) $a^x/a^y = a^{x-y}$ 3) $(a^x)^y = a^{xy}$
4) $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$ 5) $a^x/b^x = (a/b)^x$

damit sind Verallgemeinerungen möglich:

- $(a^{1/m})^m = a^{1/m \cdot m} = a^1 = a \Rightarrow a^{1/m} = \sqrt[m]{a}$

  ebenso begründet man: $a^{n/m} = \sqrt[m]{a^n} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n$ für $m,n \in N$;

  damit ist a^x für alle $x \in \mathbb{Q}_0^+$ definiert

- $a^x \cdot a^{-x} = a^{x-x} = a^0 = 1 \Rightarrow a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ für $x \in \mathbb{Q}_0^-$;

  damit ist a^x für alle $x \in \mathbb{Q}$ definiert

- für x $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$: z. B. 2^π

  π kann man beliebig genau annähern durch 3 bzw. $3{,}1 = \frac{31}{10}$ bzw. $3{,}14 = \frac{314}{100}$ usw. $\Rightarrow$

  2^π kann man beliebig genau annähern durch 2^3 bzw. $2^{31/10} = \sqrt[10]{2^{31}}$ bzw. $2^{314/100} = \sqrt[100]{2^{314}}$ usw.

  allgemein: $a^x = \lim\limits_{q \to x} a^q$ mit $q \in \mathbb{Q}$; damit ist a^x für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert

b) Exponentialfunktionen: Begriff und Eigenschaften

Definition: Eine Funktion mit einem Term der Form $f(x) = a \cdot b^x$ mit $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und $b \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}$ heißt Exponentialfunktion zur Basis b. b nennt man oft auch den Wachstumsfaktor.

Eigenschaften:

- $D_f = \mathbb{R}$, $W_f = \mathbb{R}^+$ ($a > 0$) bzw. $\mathbb{R}^-$ ($a < 0$)
- G_f schneidet die y-Achse in $(0|a)$; a heißt deshalb auch „Anfangswert“.
- Die Graphen sind nicht symmetrisch zum KS (weil $b^{-x} \neq b^x$ oder $-b^x$ ist); aber: Spiegelt man den Graphen zu $f(x) = a \cdot b^x$ an der y-Achse, so erhält man den zu $g(x) = a \cdot b^{-x} = a \cdot (1/b)^x$.
- $a > 0$: Für $b > 1$ sind die Graphen streng monoton steigend, für $b < 1$ streng monoton fallend; alle sind überall linksgekrümmt. $a < 0$: alles umgekehrt
- Die Funktionen haben keine Nullstellen, keine Extremstellen, keine Wendestellen.
- Die x-Achse ($y = 0$) ist eine waagrechte Asymptote für $x \to -\infty$ ($b > 1$) bzw. $x \to +\infty$ ($b < 1$), d. h. der Graph nähert sich dort jeweils an die x-Achse an.
- G_f ist stetig in ganz $\mathbb{R}$.