(das alles muss man ab jetzt immer wissen!)

Grundwissen: Ganzrationale Funktionen und ihre Nullstellen

Eine Funktion heißt ganzrational (oder Polynomfunktion), wenn sie eine Summe von Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten ist, wenn ihr Funktionsterm also in der Form

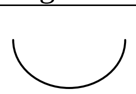
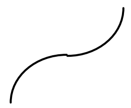
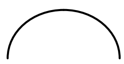
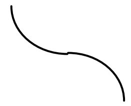
$$f(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + ... + a_2\, x^2 + a_1\, x + a_0 \qquad (a_n \neq 0)$$

geschrieben werden kann. Die Zahl $n \in \mathbb{N}$ heißt der Grad der ganzrationalen Funktion, die Zahlen a_n, a_{n-1}, ..., a_2, a_1, $a_0 \in \mathbb{R}$ heißen ihre Koeffizienten (a_n: Leitkoeffizient LK), ihr Funktionsterm ist ein Polynom.

speziell: Für n = 1 ergibt sich eine lineare Funktion $f(x) = a_1\, x + a_0$, für n = 2 eine quadratische Funktion $f(x) = a_2\, x^2 + a_1\, x + a_0$ (und für n = 3 eine sog. kubische Funktion).

Symmetrie: Treten im Funktionsterm einer ganzrationalen Funktion nur gerade bzw. nur ungerade Potenzen auf, so ist ihr Graph symmetrisch zur y-Achse bzw. zum Ursprung, ansonsten hat er keine Symmetrie zum KS.

Verhalten für $x \to \pm\infty$: Dort ist nur der Summand mit der höchsten Potenz wichtig, d. h. der Graph sieht „ganz links" und „ganz rechts" genau so aus wie der Graph der Funktion $g(x) = a_n\, x^n$:

	n gerade	n ungerade
$a_n > 0$		
$a_n < 0$		

Beispiel: Der Graph der Funktion $f(x) = -1{,}5\, x^3 + \pi\, x^2 - \sqrt{2}$ verhält sich für $x \to \pm\infty$ genauso wie der Graph der Funktion $g(x) = -1{,}5\, x^3$, d. h. er kommt von links oben und geht nach rechts unten; es gilt also:

$$f(x) \to +\infty \text{ für } x \to -\infty \text{ und } f(x) \to -\infty \text{ für } x \to +\infty$$

Anmerkung: Ist der Funktionsterm in faktorisierter Form gegeben, so muss man ihn hier nicht komplett ausmultiplizieren; es genügt, wenn man den konstanten Faktor und die jeweils höchsten Potenzen von x multipliziert; Beispiel: $f(x) = -2\, x^2\, (x + 1)^2\, (x - 2)^3 = -2\, x^2 \cdot (x^2 + ..) \cdot (x^3 + ...) = -2\, x^7 + ...$

Linearfaktorzerlegung / Faktorisierung / Verhalten bei Nullstellen:
Hat eine ganzrationale Funktion f vom Grad n die Nullstelle x_1, so kann man sie schreiben als

$$f(x) = (x - x_1) \cdot g(x)$$

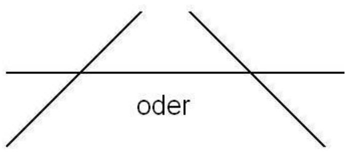
mit einer ganzrationalen Funktion g vom Grad n–1. Der Term $(x - x_1)$ heißt ein Linearfaktor. Spaltet man so auch noch die zu den anderen Nullstellen gehörenden Linearfaktoren ab, so kann man f schließlich schreiben als ein Produkt von Linearfaktoren (von denen manche auch mehrfach vorkommen können) und evtl. einer ganzrationalen Funktion z, die keine weiteren Nullstellen hat:

$$f(x) = (x - x_1)^{k_1} \cdot (x - x_2)^{k_2} \cdot \mathrm{K} \cdot z(x)$$

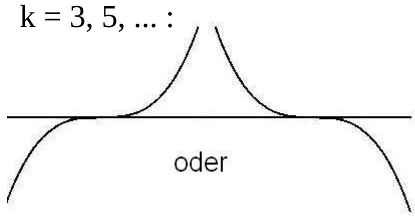
Die (natürlichen) Zahlen k_1, k_2, ... heißen die Vielfachheiten der Nullstellen x_1, x_2, ...
(Beispiel: Die Funktion $f(x) = 2\, x^6 - 2\, x^2$ lässt sich auch schreiben als $f(x) = x^2\, (x + 1)\, (x - 1)\, (2\, x^2 + 2)$ (vgl. zweite Seite oben). Also hat sie die Nullstellen 0, -1 und 1 mit den Vielfachheiten 2, 1 und 1; außerdem tritt hier noch die Funktion $z(x) = 2\, x^2 + 2$ als Faktor auf, die keine weiteren Nullstellen hat.)

Hat eine Nullstelle ungerade Vielfachheit, so schneidet der Graph die x-Achse an dieser Stelle (für $k \geq 3$ waagrecht), und die Funktionswerte wechseln ihr Vorzeichen (VZW); hat eine Nullstelle gerade Vielfachheit, so berührt der Graph die x-Achse an dieser Stelle (kein VZW):

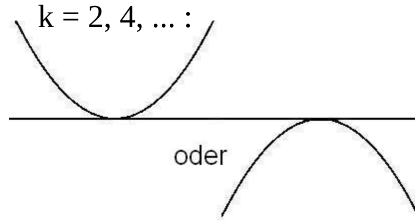
k = 1:



k = 3, 5, ... :



k = 2, 4, ... :



(das alles muss man ab jetzt immer wissen!)

y-Achsenabschnitt:

Wenn die Funktionsgleichung in der normalen Form gegeben ist, kann man den y-Achsenabschnitt direkt ablesen (a_0); ist sie in faktorisierter Form gegeben, so berechnet man f(0).

Bestimmung von Nullstellen / Gleichungen lösen:

Eine Gleichung der Form „Polynom n-ten Grades = 0“ heißt (algebraische) Gleichung n-ten Grades. Allgemein gilt: Eine ganzrationale Funktion vom Grad n hat höchstens n Nullstellen (Vielfachheiten mitgezählt).

Verfahren:

1) möglichst hohe Potenzen von x und evtl. konstante Faktoren ausklammern; im Beispiel auf der ersten Seite unten: $f(x) = 2x^6 - 2x^2 = 2x^2(x^4 - 1)$
2) binomische Formeln (rückwärts) anwenden; im Beispiel von eben: $f(x) = ... = 2x^2(x^4 - 1) = 2x^2(x^2 - 1)(x^2 + 1) = 2x^2(x + 1)(x - 1)(x^2 + 1)$ (das kann man dann wiederum schreiben als $f(x) = x^2(x + 1)(x - 1)(2x^2 + 2)$, womit man also die Form hat, die auf der Vorderseite angegeben ist)
3) Mitternachtsformel (oder einfachere Verfahren, z. B. ausklammern, Vieta, ...; siehe Blatt zu quadratischen Funktionen!) verwenden, um die Nullstellen quadratischer Funktionen / Faktoren zu erhalten
4) wenn nur $a_n x^n$ und a_0 auftreten: a_0, a_n auf die andere Seite bringen; wenn möglich, dann die n-te Wurzel ziehen (wenn n gerade ist: zwei Lösungen, plus / minus!); Beispiel.: $f(x) = 2x^4 - 32 = 0$ ➔ $2x^4 = 32$ ➔ $x^4 = 16$ ➔ $x_{1,2} = \pm 2$; diese Nullstelle(n) ist/sind dann immer einfach
5) bei biquadratischen Funktionen / Faktoren: Substitution verwenden, entstehende quadratische Gleichung lösen, Rücksubstitution nicht vergessen ($\pm\sqrt{\ }$!)
6) wenn sonst nichts mehr hilft: eine Nullstelle durch Probieren / Wertetabelle herausfinden, dann Polynomdivision durchführen, dann mit einem der Verfahren weitermachen.

gemeinsame Punkte von Graphen:

Man setzt beide Funktionsterme gleich, löst also die Gleichung $f(x) = g(x)$. Die Lösungen (x-Werte) setzt man dann in f oder g ein, um die y-Werte der gemeinsamen Punkte zu erhalten. Dabei gilt: Ist x eine einfache / dreifache / ... Lösung, so ergibt sich ein Schnittpunkt; ist x eine doppelte / vierfache / ... Lösung, so ergibt sich ein Berührpunkt.

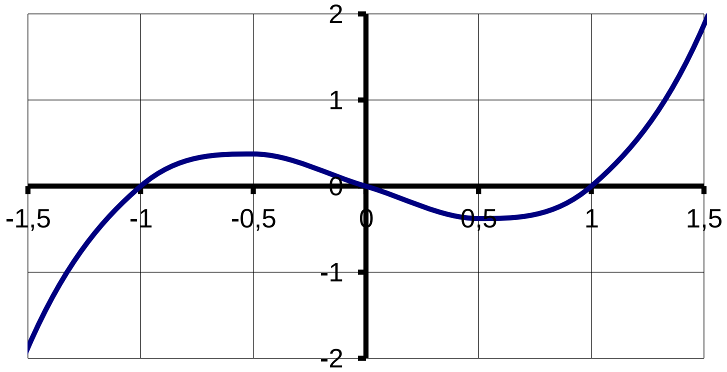
Lösen von Ungleichungen: *(wenn nötig: erst so umstellen, dass rechts 0 steht!)*

1) zugehörige Gleichung lösen 2) zugehörigen Graph skizzieren 3) Lösungsmenge ablesen

Beispiel: $x^3 - x > 0$

1) Gleichung lösen: $x^3 - x = 0$ führt auf $x_1 = 0$; $x_2 = -1$; $x_3 = 1$, alle einfach

2) Graph skizzieren:



3) am Graphen kann man ablesen: $x^3 - x > 0$ für $-1 < x < 0$ und für $x > 1$, also: $\mathbb{L} =]-1;0[\cup]1;\infty[$.

Stetigkeit:

Jede ganzrationale Funktion ist in ganz $\mathbb{R}$ stetig, d. h., ihr Graph macht keine Sprünge. (Man kann den Graph durchzeichnen, ohne mit dem Bleistift absetzen zu müssen.)