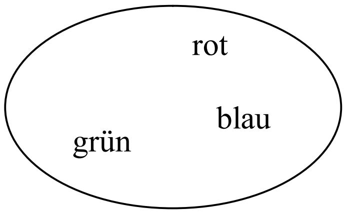
Grundwissen zu Mengen

Eine Menge ist eine Zusammenfassung von Objekten zu einem Ganzen. Die Objekte heißen Elemente der Menge. Ist ein Objekt a ein Element der Menge A, so schreibt man $a \in A$.

Darstellung:

a) aufzählend, z. B. A = {Hans, Petra, ...} oder P = {2, 3, 5, 7, ...}
b) beschreibend, z. B. A = {Schüler x | x hat eine Formelsammlung bestellt} oder $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 5\}$
c) Venn-Diagramme (nach *John Venn*, 1834–1923), z. B.:

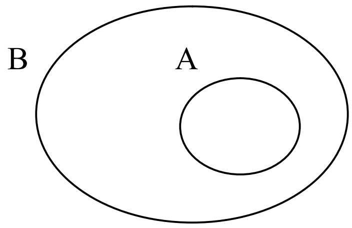


d) Intervalle (speziell bei reellen Zahlen): Die kleinere Zahl steht immer zuerst!
- abgeschlossen: z. B. $[-1;3] = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \le x \le 3\}$
- offen: z. B. $]-5;\pi[= \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x < \pi\}$
- halboffen: z. B. $]-\sqrt{2};-1] = \{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{2} < x \le -1\}$
- speziell: $]-\infty;a] = \{x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x \le a\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le a\}$
  $[a;\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < \infty\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge a\}$

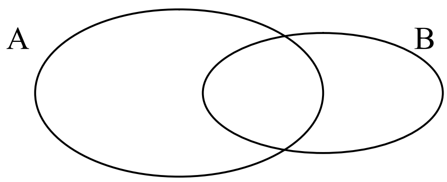
$-\infty$ und ∞ werden immer ausgeschlossen!

Beziehungen zwischen Mengen:

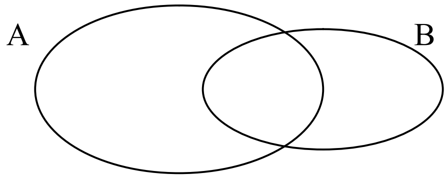
a) $A \subset B$ („A ist Teilmenge von B“) bedeutet, dass jedes Element von A auch Element von B ist; im Diagramm:



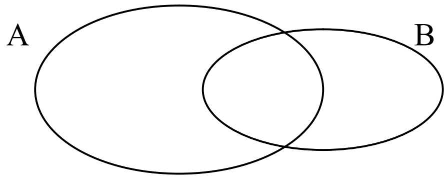
b) A\B („ A ohne B“) enthält die Elemente der Menge A ohne die Elemente der Menge B; im Diagramm:



c) $A \cap B$ („A geschnitten mit B“, „Schnittmenge von A und B“) enthält alle Elemente, die in A und in B gleichzeitig liegen; im Diagramm:



d) $A \cup B$ („A vereinigt mit B“, „Vereinigungsmenge von A und B“) enthält alle Elemente, die in A oder in B (oder in beiden) liegen; im Diagramm:



wichtige (Zahlen-)Mengen:

- $\{\} = \phi$ leere Menge
- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$: natürliche Zahlen (nach DIN; alte Schreibweise: $\mathbb{N}_0$)
- $\mathbb{N}^* = \{1, 2, ...\} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (nach DIN; alte Schreibweise: $\mathbb{N}$)
- $\mathbb{Z} = \{...-2, -1, 0, 1, 2, ...\}$: ganze Zahlen
- $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{Z}^*$, $\mathbb{Z}^+_0 = \mathbb{N}$ (nach DIN aber eigentlich: $\mathbb{Z}_{>0}$ bzw. $\mathbb{Z}_{\geq 0}$), $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, ...
- $\mathbb{Q}$: rationale Zahlen (wie **Q**uotient; Merkhilfe: *englisch* ratio = Verhältnis, Bruch)
  Dies sind alle Zahlen, die man als Bruch schreiben kann, wobei Zähler und Nenner ganze Zahlen sind, z. B.: $0{,}5 = \frac{1}{2}$; $3{,}\overline{3} = \frac{10}{3}$; $-2 = \frac{-2}{1}$ usw.
  Das entspricht genau den Dezimalzahlen, die abbrechend oder periodisch sind.
- Dezimalzahlen, die nicht abbrechen und nicht periodisch sind, heißen irrational. Irrationale Zahlen können deshalb nie exakt als Dezimalzahl angegeben werden, sondern immer nur näherungsweise! Beispiele dafür sind Wurzeln aus vielen rationalen Zahlen (z. B. ist $\sqrt{2} \approx 1{,}41421$ irrational, aber $\sqrt{\frac{49}{121}} = \frac{7}{11}$ rational) oder auch die „Kreiszahl" $\pi \approx 3{,}14159$. Für die irrationalen Zahlen gibt es keine allgemein übliche Abkürzung.
- $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{\text{irrationale Zahlen}\}$: reelle Zahlen

Beachte: Jede der oben aufgeführten Grund-Zahlenmengen ist jeweils eine Teilmenge aller folgenden.

$$\{\} \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Eine Intervallschachtelung ist eine unendliche Folge von abgeschlossenen Intervallen, sodass jedes Intervall in allen vorhergehenden enthalten ist und die Intervalle immer kleiner werden.

Beispiel: [1;2], [1,4;1,5], [1,41;1,42], [1,414;1,415], ...

Jede Intervallschachtelung führt auf genau eine reelle Zahl. Man sagt, $\mathbb{R}$ ist vollständig.