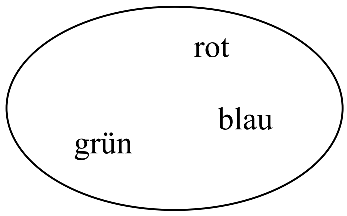
Grundwissen zu Mengen

- Eine <u>Menge</u> ist eine Zusammenfassung von Objekten zu einem Ganzen. Die Objekte heißen <u>Elemente</u> der Menge. Ist ein Objekt a ein Element der Menge A, so schreibt man $a \in A$, ansonsten $a \notin A$. *(Man könnte auch* $\neg a \in A$ *schreiben.)*
- Eine Menge, die keine Elemente enthält, heißt <u>leere Menge</u>; man schreibt für sie $\{\}$ oder ϕ.
- Zwei Mengen heißen genau dann gleich ($A = B$), wenn sie die gleichen Elemente enthalten, ansonsten heißen sie ungleich ($A \neq B$).
- Hat eine Menge A nicht unendlich viele Elemente, dann schreibt man für die Anzahl ihrer Elemente $|A|$ und nennt dies ihre <u>Mächtigkeit</u>.

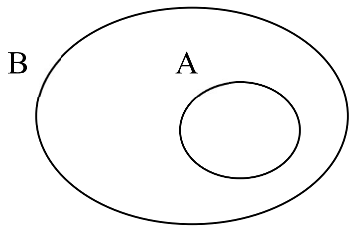
<u>Darstellungsmöglichkeiten:</u>

- aufzählend, z. B. A = {Hans, Peter, Klaus} oder P = {2, 3, 5, 7, ...} (beachte: mehrfach vorkommende Elemente werden nur einmal aufgezählt)
- beschreibend, z. B. A = {Schüler x | x hat eine Formelsammlung bestellt} oder $B = \{x \mid x > 5\}$
  sprich: „A ist die Menge aller Schüler x, für die gilt: ...“; hinter dem Strich steht hier immer eine Aussage! Die allgemeine Darstellung ist hier also: $A = \{x \mid p(x)\}$.
- Venn-Diagramme (nach *John Venn*, 1834–1923), z. B.:



<u>Beziehungen zwischen Mengen:</u>

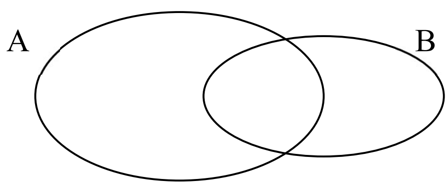
- $A \subset B$ („A ist Teilmenge von B“) bedeutet, dass jedes Element von A auch Element von B ist (*also:* $a \in A \Rightarrow a \in B$). Im Venn-Diagramm:



Insbesondere kann hier auch A = B sein! (*Anmerkung:* Gilt $A \subset B$, aber $A \neq B$, so nennt man A eine <u>echte</u> Teilmenge von B und schreibt auch $A \underset{\neq}{\subset} B$.) Ist A dagegen keine Teilmenge von B, schreibt man $A \not\subset B$.
Beispiel: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3\}$; $C = \{2, 3, 1\}$; dann gilt $B \underset{\neq}{\subset} A$, $B \underset{\neq}{\subset} C$, $A \subset C$ und $A \not\subset B$.

- $A \cap B$ („A geschnitten mit B“, „Schnittmenge von A und B“) enthält alle Elemente, die gleichzeitig in A und in B liegen.

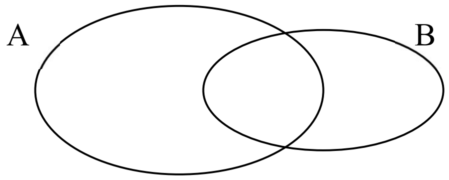
  Im Venn-Diagramm:



kurz: $A \cap B = \{x \mid \qquad\qquad \}$

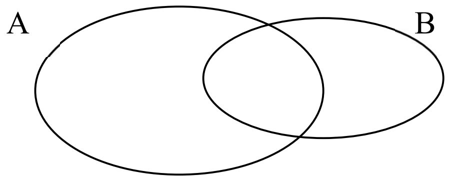
- $A \cup B$ („A vereinigt mit B“, „Vereinigungsmenge von A und B“) enthält alle Elemente, die in A oder in B liegen (oder in beiden).

  Im Venn-Diagramm:

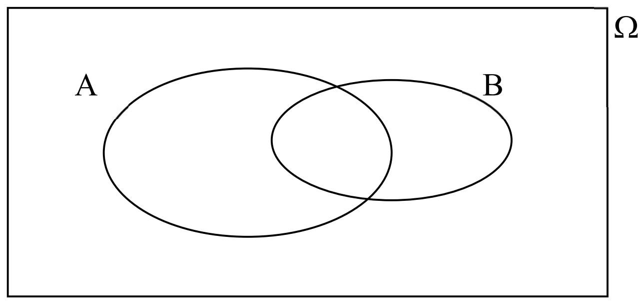
  kurz: $A \cup B = \{x \mid \qquad\qquad\qquad \}$

- A\B („A ohne B“) enthält die Elemente der Menge A, die **nicht** in der Menge B liegen.
  Im Venn-Diagramm:

  kurz: $A \setminus B = \{x \mid \qquad\qquad\qquad \}$

- Oft hat man eine Obermenge, von der Teilmengen betrachtet werden (z. B. könnte die Obermenge aus allen natürlichen Zahlen bestehen, und es werden die Teilmengen der Primzahlen und der Zahlen, die nicht prim sind, betrachtet); für diese schreibt man meist O, M oder Ω (Omega). Im Venn-Diagramm wird eine Obermenge meist als Rechteck gezeichnet. Für Ω\A schreibt man dann auch $\overline{A}$ (oder @A) und nennt dies das Komplement von A (oder „nicht-A“).

  kurz: $\overline{A} = \{x \in \Omega \mid x \notin A\}$, wenn $A \subset \Omega$ ist

Ergänzung: Das kartesische Produkt $A \times B$ zweier Mengen A und B bezeichnet die Menge, die alle geordneten Paare von Elementen aus A und B enthält: $A \times B = \{(a;b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$ *(benannt nach dem französischen Mathematiker und Philosophen René Descartes, 1596-1650).*
Beispiel: A = {Hans; Klaus; Heike}, B = {2; 5}; dann ist
$A \times B$ ={(Hans;2); (Hans;5); (Klaus;2); (Klaus;5); (Heike;2); (Heike;5)}