Grundwissen zu Grenzwerten

Bei vielen Funktionen kann man manche x-Werte nicht einfach einsetzen. Z. B. kann man natürlich in keine Funktion die „Werte“ x = $\pm\infty$ einsetzen, und bei der Funktion f: $x \mapsto \frac{x^2-1}{x^2-x}$ kann man den Wert x = 1 nicht einsetzen, weil

In solchen Fällen kann man sich aber zumindest an die gewünschten x-Werte <u>annähern</u>. Wenn man beispielsweise wissen will, was mit einer Funktion „bei x = ∞“ passiert, schaut man sich an, was mit ihr passiert, wenn man unbegrenzt immer größere x-Werte einsetzt (10, 100, 1000, …). Man sagt dann „x geht gegen unendlich“ und schreibt kurz dafür $x \longrightarrow \infty$. Entsprechend bedeutet $x \longrightarrow -\infty$, dass x unbegrenzt immer kleiner (also „stärker negativ") wird (−10, −100, −1000, ...).

Andererseits kann man sich z. B. an die Stelle $x_0 = 1$ annähern, indem man z. B. die x-Werte 0,9; 0,99; 0,999, … einsetzt (Annäherung „von links“), oder z. B. die x-Werte 1,1; 1,01; 1,001, … (Annäherung „von rechts“). Man sagt dann „x geht gegen 1“ und schreibt kurz dafür $x \longrightarrow 1$. (Wenn es nötig ist, unterscheidet man die Annäherung „von links“ bzw. „von rechts“ voneinander durch die Schreibweisen $x \longrightarrow 1^-$ bzw. $x \longrightarrow 1^+$.)

Grenzwerte und Konvergenz:

Wenn sich die Funktionswerte f(x) einer Funktion für $x \longrightarrow \infty$ immer mehr einem Wert g annähern, so sagt man, g ist der **Grenzwert** von f und schreibt

$$f(x) \longrightarrow g \text{ für } x \longrightarrow \infty$$ („f von x geht gegen g für x gegen unendlich")

oder

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = g$$ („Limes f von x für x gegen unendlich ist g")

Völlig entsprechend sind die Grenzwerte für $x \longrightarrow -\infty$ bzw. $x \longrightarrow x_0$ definiert. Man sagt dann auch, dass f gegen g „konvergiert" bzw. „konvergent" ist.

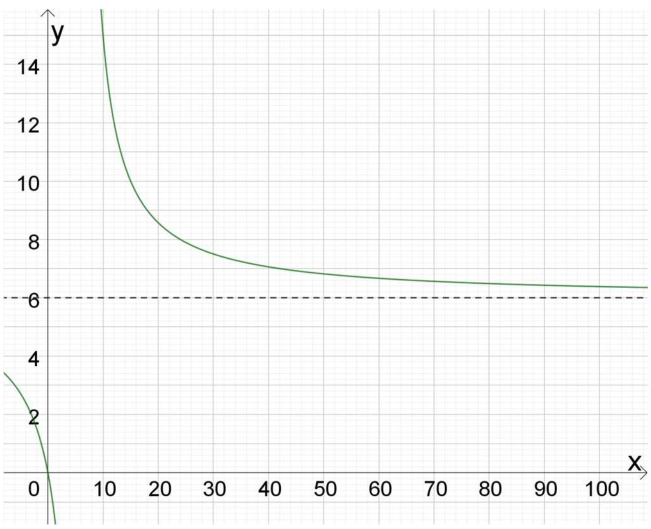
Beispiel 1: $f(x) = \frac{6x}{x-6}$; $x \longrightarrow \infty$

x	10	100	1000	10000
f(x)	15	6,383	6,036	6,004

Die Funktionswerte nähern sich für unbegrenzt größer werdendes x anscheinend immer mehr an den Wert an, also gilt anscheinend $f(x) \longrightarrow$ für $x \longrightarrow \infty$ bzw. $\lim_{x\to\infty} f(x) =$.

(Beachte: Dass der Grenzwert ist, ist nur eine Vermutung, das müsste man eigentlich noch beweisen!)

Graphisch sieht das so aus:



Der Funktionsgraph nähert sich also „ganz rechts“ immer mehr der Geraden mit der Gleichung an.

(„waagrechte Asymptote‘‘)

Beispiel 2: $f(x) = \frac{2x^2}{3x^2+1}; x \longrightarrow -\infty$

x	−10	−100	−1000
f(x)	0,664	0,66664	0,6666664

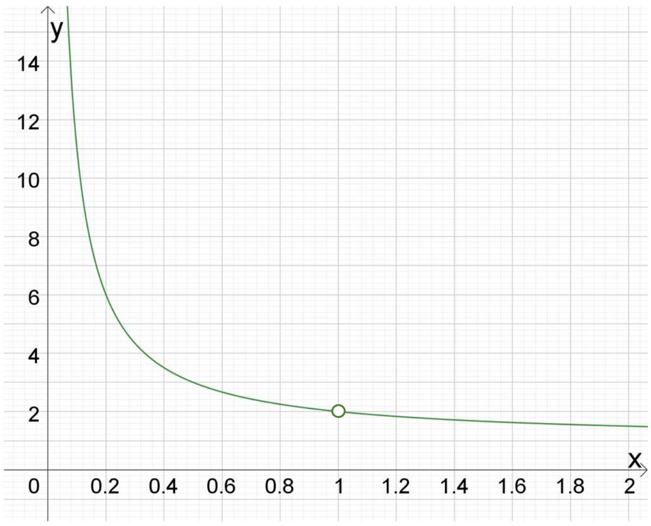
Die Funktionswerte nähern sich für unbegrenzt kleiner werdendes x anscheinend immer mehr an den Wert an, also gilt anscheinend f(x) $\longrightarrow$ für x $\longrightarrow -\infty$ bzw. $\lim\limits_{x\to-\infty}$ f(x) = . *(wieder: Vermutung!)*

Beispiel 3: $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-x}; x \longrightarrow 1$

x	1,1	1,01	1,001	1,0001
f(x)	1,909	1,990	1,9990	1,99990

Die Funktionswerte nähern sich anscheinend immer mehr an den Wert an, wenn x sich an den Wert 1 annähert, also gilt anscheinend f(x) $\longrightarrow$ für x $\longrightarrow 1$ bzw. $\lim\limits_{x\to 1}$ f(x) = . (*Vermutung!)*

Graphisch:



Der Graph hat also bei $x_0 = 1$ ein „Loch‘‘, durch das man aber eigentlich auch einfach durchzeichnen könnte. („stetig behebbare Definitionslücke‘‘)

Uneigentliche Grenzwerte und Divergenz:

Werden die Funktionswerte für $x \longrightarrow \infty$ (bzw. $x \longrightarrow -\infty$ bzw. $x \longrightarrow x_0$) dagegen unbegrenzt immer größer, so hat f eigentlich keinen Grenzwert. Man schreibt dann aber trotzdem

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

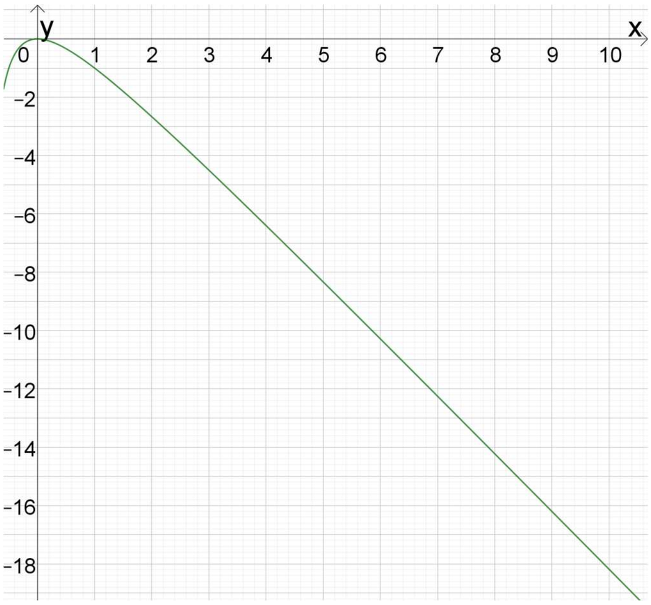
und nennt dies auch einen „uneigentlichen Grenzwert". Entsprechendes gilt, wenn die Funktionswerte unbegrenzt immer kleiner werden. Man sagt dann auch, dass f „(bestimmt) divergiert" bzw. „(bestimmt) divergent" ist.

Beispiel 4: $f(x) = \frac{-2x^2}{x+1}; x \longrightarrow \infty$

x	10	100	1000
f(x)	−18,18	−198,0	−1998

Die Funktionswerte werden hier für unbegrenzt größer werdendes x anscheinend unbegrenzt immer kleiner, also gilt anscheinend $\lim\limits_{x\to\infty}$ f(x) = . *(Vermutung!)*

Graphisch:

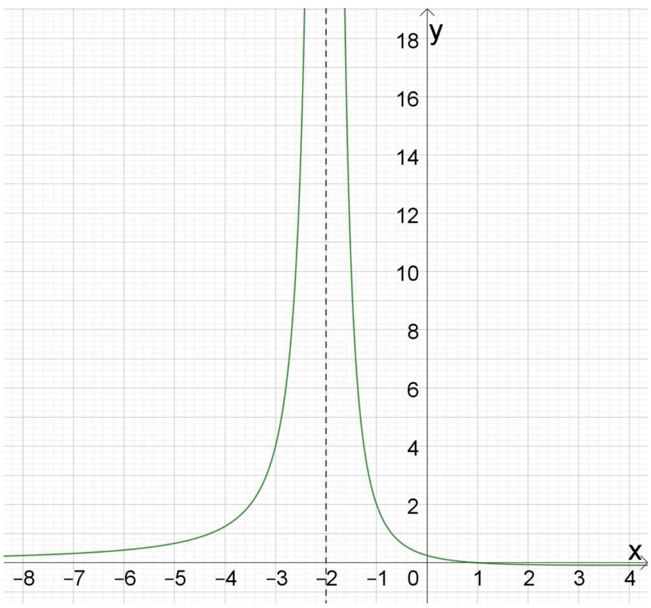


Beispiel 5: $f(x) = \frac{1-x}{(x+2)^2}; x \longrightarrow -2$

x	−1,9	−1,99	−1,999
f(x)	290	29 900	2 999 000

Die Funktionswerte werden hier anscheinend unbegrenzt immer größer, wenn x sich an den Wert −2 annähert, also gilt anscheinend $\lim\limits_{x \to -2} f(x) =$. *(Vermutung!)*

Graphisch:



Der Funktionsgraph nähert sich also in der Nähe von $x_0 = -2$ immer mehr der Geraden mit der Gleichung   an. („senkrechte Asymptote‘‘; den x-Wert nennt man auch „Polstelle‘‘)