Grundwissen zu Funktionen

Oft sind zwei Mengen von Zahlen, Größen, ... so miteinander verbunden, dass jedem Element einer Menge (Ausgangsmenge) mindestens ein Element der anderen Menge (Zielmenge) zugeordnet ist.

Beispiele:

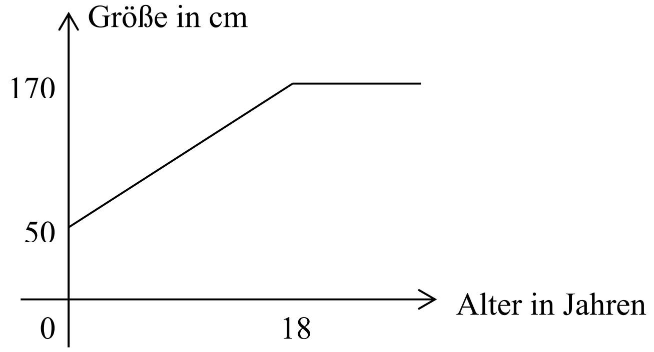
1) Jedem Menschen wird seine Haarfarbe zugeordnet.
2) Jedem Schüler einer Klasse wird seine Schuhgröße zugeordnet.
3) Jedem Alter einer Person (in Jahren) wird deren Größe (in cm) zugeordnet.

Darstellung von Zuordnungen:

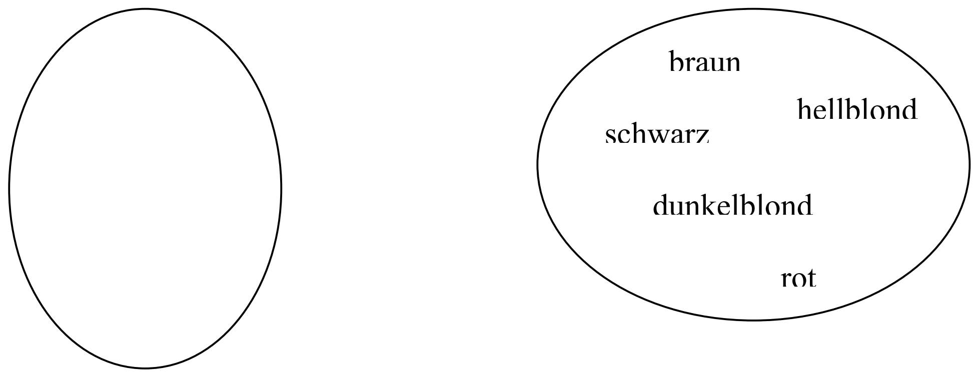
1) Wertetabellen; im 2. Beispiel:

Schüler					
Schuhgröße					

2) Graphen (Schaubilder); im 3. Beispiel:



3) Gleichung / Term; z. B.: $y = 2x - 3$ oder $V = a^3$
4) Venn-Diagramme; im 1. Beispiel:



Im Beispiel mit den Haarfarben fällt dabei auf, dass ein und demselben Menschen auch zwei verschiedene Haarfarben zugeordnet sein können. In den beiden anderen Beispielen wird dagegen jedem Element der Ausgangsmenge (jedem Schüler bzw. jedem Alter) nur jeweils ein Element der Zielmenge (Schuhgröße bzw. Größe) zugeordnet. Diese beiden Fälle führen zu folgender

Definition: Zuordnungen zwischen Mengen, bei denen jedem Element der einen Menge genau ein Element der anderen Menge zugeordnet wird, heißen Funktionen. (Zuordnungen zwischen Mengen, bei denen jedem Element der einen Menge mindestens ein Element der anderen Menge zugeordnet wird, heißen dagegen „Relationen‘‘.)

kurz:

Funktionen sind eindeutige Zuordnungen.

Begriffe zu Funktionen:

Die Zuordnungs- oder Abbildungsvorschrift einer Funktion sieht immer folgendemaßen aus:

$$f: x \mapsto f(x)$$

sprich: „durch die Funktion f wird dem Wert x der Wert f **von** x zugeordnet“
Beispiel:

$$f: x \mapsto 2x - 3$$

„durch die Funktion f wird dem Wert x der Wert 2x – 3 zugeordnet“
Der Term f(x) (hier: 2x – 3), dem jeder Wert x zugeordnet wird, heißt Funktionsterm. Funktionen werden oft dadurch beschrieben, dass man (statt der Zuordnungsvorschrift) nur ihren Term angibt, hier also:

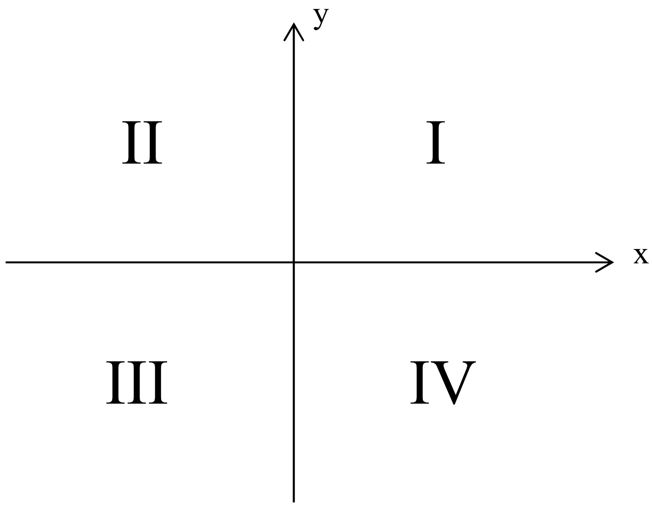
$$f(x) = 2x - 3$$

Die Ausgangsmenge einer Funktion f wird Definitionsmenge D_f (oder $\mathbb{D}_f$ oder D(f) ...) genannt, die Menge der sich ergebenden Werte Wertemenge W_f (oder $\mathbb{W}_f$ oder W(f) …). Die Werte x aus D_f heißen Argumente, die Werte f(x) aus W_f heißen Funktionswerte. Bestehen die Definitionsmenge und die Wertemenge aus reellen Zahlen (also $D_f \subset \mathbb{R}$ und $W_f \subset \mathbb{R}$), so heißt f eine reelle Funktion.

Ein x-Wert x_0, für den eine (reelle) Funktion f den Wert 0 annimmt, also $f(x_0) = 0$ gilt, heißt Nullstelle von f. (***Beachte:*** eine „Stelle“ ist ***immer nur*** ein x-Wert, kein Punkt!)

Trägt man in einem Koordinatensystem die Punkte ein, deren x-Werte (Abszissen) die Argumente von f und deren y-Werte (Ordinaten; *Merkregel: die Ordinate geht nach oben*) die zugehörigen Funktionswerte von f sind, so ergibt sich der Graph G_f der Funktion. Ein Punkt P(x|y) gehört genau dann zum Graph, wenn gilt: y = f(x) (das ist die Funktionsgleichung). Oft nennt man hier x auch die unabhängige und y die abhängige Variable.

Die vier Teile, in welche die Zeichenebene durch die Koordinatenachsen zerlegt wird, heißen Quadranten; sie werden (gegen den Uhrzeigersinn) mit römischen Buchstaben durchnummeriert:



Vorsicht: Besonders in Anwendungen (z. B. Geometrie, Physik) wird meist nicht streng zwischen der Funktion (also der Zuordnung zwischen zwei Variablen) und der zugeordneten Variable (der Ordinate) unterschieden. So schreibt man beispielsweise für den Flächeninhalt A eines Kreises in Abhängigkeit von seinem Radius r kurz $A(r) = \pi r^2$ statt $A = f(r) = \pi r^2$ oder für die Kraft F einer um die Strecke s gedehnten Feder kurz $F(s) = D \cdot s$ statt $F = f(s) = D \cdot s$ (wobei die Funktion hier jeweils mit f bezeichnet ist).