Grundwissen Brüche

Begriffe:

- Einen Quotienten zweier ganzer Zahlen z und n ($\neq 0!$) bezeichnet man auch als Bruch und schreibt dafür $\frac{z}{n}$. Dabei heißt z der Zähler, n der Nenner des Bruchs.
- Ein Bruch, dessen Zähler 1 ist, heißt Stammbruch; z. B.: $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{3540}$
- Ist |z| < |n|, so heißt der Bruch echt, ansonsten unecht; z. B.: $\frac{3}{7}$ (echt); $-\frac{99}{100}$ (echt); $\frac{3}{2}$ (unecht)
- Unechte Brüche schreibt man oft auch als gemischte Zahlen: man teilt den Bruch auf in eine ganze Zahl und einen echten Bruch (Beispiel: $\frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$).
- Für einen gegebenen Bruch $\frac{a}{b}$ bezeichnet man den Bruch $\frac{b}{a}$ als Kehrbruch oder Kehrzahl; z. B.: $\frac{3}{2}$ und $\frac{2}{3}$ sind Kehrbrüche zueinander.
- Zwischen je zwei gegebenen (Dezimal-)Brüchen liegen immer (unendlich viele) weitere Brüche. Man sagt, die Brüche (also die rationalen Zahlen) liegen dicht.

Multiplizieren und Dividieren:

- Man multipliziert einen Bruch mit einer ganzen Zahl, indem man den Zähler multipliziert (oder den Nenner dividiert); man dividiert einen Bruch durch eine ganze Zahl, indem man den Nenner multipliziert (oder den Zähler dividiert); z. B.: $3 \cdot \frac{2}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$; $\frac{8}{11} : 2 = \frac{8}{22} = \frac{4}{11}$.
- Zwei Brüche werden miteinander multipliziert, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert; z. B: $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 7} = \frac{15}{28}$.
- Durch einen Bruch wird dividiert, indem man mit dem Kehrbruch multipliziert; z. B.: $\frac{5}{7} : \frac{2}{3} = \frac{5}{7} \cdot \frac{3}{2} = \frac{15}{14}$.
- Spezialfall der letzten Regel: Teilt man 1 durch einen Bruch, so ergibt sich der Kehrbruch; z. B.: $\frac{1}{\frac{2}{3}} = 1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$.
- Es gelten dieselben Vorzeichenregeln und Rechengesetze (K, A) wie bei den ganzen Zahlen.

Kürzen und Erweitern:

Jeden Term kann man mit 1 multiplizieren, ohne seinen Wert zu ändern. Die 1 kann man aber auch als $\frac{k}{k}$ mit einer beliebigen Zahl k (ungleich 0) schreiben. Also folgt für jeden Bruch:

$$\frac{z}{n} = \frac{z}{n} \cdot 1 = \frac{z}{n} \cdot \frac{k}{k} = \frac{z \cdot k}{n \cdot k},$$

das heißt, der Wert eines Bruchs ändert sich nicht, wenn man seinen Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl multipliziert. Man sagt, der Bruch wird „mit k erweitert“. Kann man umgedreht sowohl Zähler als auch Nenner als ein Produkt mit derselben Zahl k schreiben, so folgt, dass man diese Zahl k auch weg lassen kann; man sagt, der Bruch wird „mit k gekürzt“.

Beispiele: $\frac{1{,}5}{2} = \frac{1{,}5 \cdot 2}{2 \cdot 2} = \frac{3}{4}$; $\frac{4+6}{4} = \frac{(2+3) \cdot \cancel{2}}{2 \cdot \cancel{2}} = \frac{2+3}{2}$

beachte: hier darf man ***nicht*** folgendermaßen rechnen: $\frac{\cancel{4}+6}{\cancel{4}} = \frac{1+6}{1}$ oder = 6 oder ähnliches!!!

„In Differenzen und in Summen kürzen nur die D...“
Kürzen ist nur erlaubt, wenn in Zähler und Nenner jeweils ein ***Produkt*** steht!

Als Hauptnenner von mehreren Brüchen nimmt man das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) der einzelnen Nenner; Bestimmung dieses kgV:

1) mehrere Vielfache der Zahlen hinschreiben, das kleinste nehmen; Beispiel:

12: 12, 24, 36, 48, 60, 72, ...

18: 18, 36, 54, 72, 90, 108, ...

➔ kgV: 36

2) Primfaktorzerlegung:

12 = 2·2·3

18 = 2 ·3·3

➔ kgV = 2·2·3·3 (*erst schauen, wie häufig die 2 reingeht, dann die 3, ...; dann dasselbe bei der zweiten Zahl; dann alles zusammen sammeln)*

Umrechnung von Brüchen in Dezimalbrüchen:

- einfach Division ausführen!
- alternativ: Bruch so erweitern, dass im Nenner eine Zehnerpotenz steht, z. B.: $\frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 0{,}75$

Brüche entsprechen entweder abbrechenden Dezimalbrüchen (*endliche Anzahl von Dezimalen*) wie z. B. 0,25 oder periodischen Dezimalbrüchen (*eine Zifferngruppe wiederholt sich immer wieder, unendlich oft*) wie z. B. 0,161616.... Bei periodischen Dezimalbrüchen macht man über die sich wiederholende Zifferngruppe einen Strich, z. B.: $0,\overline{09}$ = 0,0909090909090909...; sprich: null Komma Periode null neun.

Umrechnen von Dezimalbrüchen in Brüche:

- abbrechende Dezimalbrüche: als Nenner passende Zehnerpotenz verwenden; z. B.: 0,354 = $\frac{354}{1000}$
- periodische Dezimalbrüche: $\frac{1}{9} = 0,\overline{1}$; $\frac{1}{90} = 0,0\overline{1}$; $\frac{1}{99} = 0,\overline{01}$ usw. verwenden; damit z. B.:
    - $0,\overline{6} = 6 \cdot 0,\overline{1} = 6 \cdot \frac{1}{9} = \frac{6}{9}\left(= \frac{2}{3}\right)$
    - $0,\overline{16} = 16 \cdot 0,\overline{01} = \frac{16}{99}$
    - $0,1\overline{6} = 0{,}1 + 6 \cdot 0,0\overline{1} = \frac{1}{10} + \frac{6}{90}\left(= \frac{9}{90} + \frac{6}{90} = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}\right)$

  also: wenn nur periodische Dezimalen, dann als Nenner 9 bzw. 99 usw. verwenden; wenn auch nicht-periodische Dezimalen, dann erst aufteilen in abbrechende und periodische Zahl

Addieren und Subtrahieren:

- Brüche mit gleichem Nenner heißen gleichnamig.
- Gleichnamige Brüche werden addiert, indem man die Zähler addiert und den Nenner stehen lässt; z. B.: $\frac{2}{11} + \frac{5}{11} = \frac{7}{11}$.
- Dabei gelten dieselben Rechengesetze (K, A, Vorzeichen) wie bei den ganzen Zahlen.
- Sind Brüche nicht gleichnamig, so bringt man sie erst durch Erweitern auf den Hauptnenner; z. B.: $\frac{5}{12} + \frac{7}{18} = \frac{15}{36} + \frac{14}{36} = \frac{29}{36}$. (Hauptnenner ist das kgV von 12 und 18, also 36)

Verbinden von Addition/Subtraktion und Multiplikation/Division: Es gilt das bekannte D-Gesetz.