Grundwissen für die 13. Klasse

grundlegende Rechengesetze:

1) **K**(ommutativ)-Gesetze der Addition und der Multiplikation:
$$a + b = b + a \quad \text{und} \quad a \cdot b = b \cdot a$$
2) **A**(ssoziativ)-Gesetze der Addition und der Multiplikation:
$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad \text{und} \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c),$$
3) **D**(istributiv)-Gesetz: $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

   Von links nach rechts sagt man **Klammer ausmultiplizieren / auflösen.** von rechts nach links **ausklammern**.

   Folgerungen:

   a) Zwei Summen / Differenzen (in Klammern) werden miteinander multipliziert, indem man jeden Summanden der ersten Klammer mit jedem Summanden der zweiten multipliziert:
$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot (c + d) + b \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$$
   b) Spezialfälle davon sind die **binomischen Formeln**:
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \qquad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$
   c) Die binomischen Formeln wiederum kann man bei der **quadratischen Ergänzung** verwenden:
$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c$$
$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$
4) **Faktorisieren**, also eine Summe / Differenz in ein Produkt umwandeln, macht man mittels ausklammern, binomischer Formeln oder (bei Polynomen) unter Verwendung des Leitkoeffizienten, der Nullstellen und ihrer Vielfachheiten.
5) **Bruchrechnen:**

   Der Term oben heißt Zähler, der unten heißt Nenner. Multipliziert man Zähler und Nenner mit demselben Faktor, so wird der Bruch **erweitert**; teilt man durch denselben Faktor, so wird der Bruch **gekürzt.**

   a) Zwei Brüche werden multipliziert, indem man Zähler und Nenner jeweils multipliziert.
   b) Durch einen Bruch wird dividiert, indem man mit dem Kehrbruch (Zähler mit Nenner vertauscht) multipliziert.
   c) Brüche werden addiert bzw. subtrahiert, indem man beide zunächst so erweitert, dass sie denselben Nenner haben. Dann werden die Zähler addiert bzw. subtrahiert.
6) **Potenzen**:

   $a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (n Faktoren) für $n \in \mathbb{N}$; $a^0 = 1$; $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$ für $n \in \mathbb{N}$; $a^{-q} = \frac{1}{a^q}$ für $q \in \mathbb{Q}^+$

   Für irrationale Exponenten r ist a^r als Grenzwert von a^q mit $q \to r$ definiert.

   Potenzgesetze: $(a, b \in \mathbb{R}^+, x, y \in \mathbb{R})$

   a) $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$ b) $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$ c) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ d) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ e) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$
7) **Wurzeln:** $(a, b \in \mathbb{R}_0^+)$ Der Term unter der Wurzel heißt der **Radikand**.

   a) $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ b) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ c) im Allgemeinen gilt ***nicht*** $\sqrt{a^2 \pm b^2} \neq a \pm b$!

   d) $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$ für $x \geq 0$, **aber**: $\sqrt{x^2} = |x|$ für $x \in \mathbb{R}$

   e) teilweise radizieren: $\sqrt{a^2 \cdot b} = a\sqrt{b}$ f) Nenner rational machen: $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$
8) **Logarithmen:**

   Ist $a^x = b$ (mit $a \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}, b \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}$), so heißt x der Logarithmus von b zur Basis a, $x = \log_a(b)$, b heißt der **Numerus**.

   speziell: $\log_{10} = \lg$; $\log_e = \ln$ (mit der Euler'schen Zahl $e \approx 2{,}71828$)

   Logarithmengesetze: $(a \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}, x, y \in \mathbb{R}^+)$

   a) $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$ b) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$ c) $\log_a(x^y) = y \cdot \log_a(x)$

   Die letzte Regel kann man auch verallgemeinern für $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, wenn y eine gerade Zahl ist, z. B.:
$$\log_a(x^2) = 2 \cdot \log_a|x|$$

9) **trigonometrische Rechenregeln:**
Das meiste steht in der Merkhilfe. Auf jeden Fall wissen sollte man aber:
a) $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ b) $\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ c) $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ („trig. Pythagoras'')
Nützlich bei manchen Integralen ist außerdem
d) $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$ e) $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$

Gleichungen lösen:

1) lineare
2) **Satz vom Nullprodukt** (SvP): Ein Produkt ist gleich null, wenn einer der Faktoren gleich null ist.
3) quadratische
   a) reinquadratische: Wurzel ziehen b) defekt quadratische: x ausklammern, SvP
   c) binomische Formeln d) Lösungsformel (e) Vieta)
4) Potenz-: passende Wurzel ziehen
5) **Substitution**: bei biquadratischen, manchen Exponential- und manchen trigonometrischen Gleichungen, …
6) eine Lösung durch Probieren finden, dann Term durch **Polynomdivision** vereinfachen
7) Bruch-: mit Hauptnenner multiplizieren
8) Exponential-: Potenz isolieren, logarithmieren
9) trigonometrische / goniometrische: Vielzahl an Lösungsverfahren, u. a. Anwendung von $\sin^{-1}$, …, quadrieren, Substitution, Anwenden von trigonometrischen Rechenregeln zur Vereinfachung

Ungleichungen lösen:

1) direkt (bei einfachen: linearen, kubischen, Exponential, …), z. B. $-2x + 3 < 5$, $x^3 < 8$, $e^x > 2$: Lösen wie Gleichungen, nur darauf achten: wenn man mit etwas negativem multipliziert / dadurch teilt, dreht sich die Richtung um! Allgemeiner gilt: Wendet man auf beiden Seiten eine streng monoton abnehmende Funktion an, so dreht sich die Richtung um.**Vorsicht:** Man darf auf beiden Seiten nur jeweils eine Funktion anwenden, die überall streng monoton ist, sonst ändert sich die Lösungsmenge! (Beispielsweise quadrieren darf man nicht, weil $f(x) = x^2$ nicht überall dieselbe Monotonie hat – außer man weiß z. B. schon, dass beide Seiten positiv sind.)
2) einfache mit Betrag (z. B. $|x - 3| \leq 2$): Gemeint ist hier letztlich einfach der Abstand von x zu einer Zahl. Die Lösung kann man an einer Skizze (Zahlenstrahl!) ablesen.
3) damit auch einfache quadratische (z. B. $(x - 3)^2 \leq 4$): Wurzel ziehen, dabei $\sqrt{x^2} = |x|$ beachten, dann Betragsungleichung lösen
4) Gleichung lösen (also Nullstellen berechnen), Graph skizzieren, Lösung ablesen
5) Vorzeichentabelle

Grundwissen zu Funktionen:

Eine Zuordnung zwischen zwei Mengen heißt **Funktion** f, wenn jedem Element der Ausgangsmenge **höchstens ein** Element der Zielmenge zugeordnet wird. Diejenigen Elemente der Ausgangsmenge, denen etwas zugeordnet wird, bilden die **Definitionsmenge** D_f; diejenigen Elemente der Zielmenge, die zugeordnet werden, bilden die **Wertemenge** W_f. Die Werte x aus D_f heißen **Argumente**, die Werte f(x) aus W_f heißen Funktionswerte.

Die **Zuordnungs-** oder **Abbildungsvorschrift** einer Funktion sieht immer folgendermaßen aus:

$$f: x \mapsto f(x)$$

(Beispiel: $f: x \mapsto 2x - 3$). Der Term f(x), dem jeder Wert x zugeordnet wird, heißt **Funktionsterm**. Funktionen werden oft dadurch beschrieben, dass man (statt der Zuordnungsvorschrift) nur ihren Term angibt, im Beispiel also: $f(x) = 2x - 3$.

Trägt man in einem Koordinatensystem (KS) die Punkte ein, deren x-Werte (**Abszissen**) die Argumente von f und deren y-Werte (**Ordinaten**) die zugehörigen Funktionswerte von f sind, so ergibt sich der **Graph** G_f der Funktion. Ein Punkt P(x|y) gehört genau dann zum Graph, wenn gilt: $y = f(x)$ (das ist die **Funktionsgleichung**). Die vier Teile, in welche die Zeichenebene durch die Koordinatenachsen zerlegt wird, heißen **Quadranten**; sie werden (gegen den Uhrzeigersinn) mit römischen Buchstaben durchnummeriert.

Ein Wert x_0, für den $f(x_0) = 0$ gilt, heißt **Nullstelle** von f. (Eine „Stelle‘‘ ist immer nur ein x-Wert, kein Punkt!) Kann man f so faktorisieren, dass $f(x) = (x - x_0)^k \cdot g(x)$ gilt mit einer natürlichen Zahl k und einer Funktion g mit $g(x_0) \neq 0$, so hat x_0 die **Vielfachheit** k. (Dies ist übrigens äquivalent zu: x_0 ist eine Nullstelle von f selbst und den ersten k–1 Ableitungen, aber keine Nullstelle der k. Ableitung.) Bei ungerader Vielfachheit schneidet der Graph an dieser Stelle die x-Achse (für k > 1 waagrecht), bei gerader Vielfachheit berührt der Graph die x-Achse.

Funktionstypen:

1) ganzrationale Funktionen (der Funktionsterm heißt dabei **Polynom**)
   speziell: lineare, quadratische, kubische, …, Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten
2) gebrochenrationale Funktionen
   speziell: Potenzfunktionen mit negativen ganzen Exponenten
   Die ganz- und gebrochenrationalen Funktionen zusammen heißen die rationalen Funktionen.
3) trigonometrische Funktionen: sin, cos, tan(, cot)
4) Exponentialfunktionen
   speziell: Die Exponentialfunktion zur Basis e heißt **natürliche** Exponentialfunktion.

Verknüpfungen:

1) Grundrechenarten
2) Verkettung: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

Einflüsse auf den Graphen, Symmetrie:

1) Wird zu x ein Wert c addiert (also f(x+c) gebildet), so verschiebt sich der Graph um c nach **links**. Wird dagegen zu f(x) ein Wert d addiert (also f(x)+d gebildet), so verschiebt sich der Graph um d nach **oben**.
2) Wird x mit einem Wert b > 0 multipliziert (also f(b·x) gebildet), so wird der Graph in **x**-Richtung mit dem Faktor 1/b **gestaucht**. Wird dagegen f(x) mit einem Wert a > 0 multipliziert (also a·f(x) gebildet), so wird der Graph in **y**-Richtung mit dem Faktor a **gestreckt**.
3) Wird x mit –1 multipliziert (also f(–x) gebildet), so wird der Graph an der **y**-Achse gespiegelt. Wird f(x) mit –1 multipliziert (also –f(x) gebildet), so wird der Graph an der **x**-Achse gespiegelt. Macht man beides, so erhält man insgesamt eine Spiegelung am Ursprung.
4) Daraus folgt die **Symmetrie** von Graphen zum KS:
   a) Gilt f(–x) = f(x) für alle $x \in D_f$, so ist der Graph (achsen)**symmetrisch zur y-Achse**. Die Funktion f selbst nennt man dann **gerade**. Im Spezialfall einer ganzrationalen Funktion gilt: f ist genau dann gerade, wenn alle Exponenten gerade Zahlen sind.
   b) Gilt f(–x) = –f(x) für alle $x \in D_f$, so ist der Graph (punkt)**symmetrisch zum Ursprung**. . Die Funktion f selbst nennt man dann **ungerade**. Im Spezialfall einer ganzrationalen Funktion gilt: f ist genau dann ungerade, wenn alle Exponenten ungerade Zahlen sind.
   c) Gilt keines von beiden, so ist der Graph **nicht symmetrisch zum KS**.
   Vorsicht: Man sollte immer erst überprüfen, ob überhaupt D_f symmetrisch zu 0 ist!