Grundlagen zu Logarithmen

Beispiel: Eine Bakterienanzahl verdoppelt sich jede Stunde. Anfangs waren es 1000; wann sind es 16000?

Gesucht ist also die Zahl x, mit der man 2 potenzieren muss, um   zu erhalten. Diese Zahl nennt man den Logarithmus von   zur Basis 2 und schreibt $x = \log_2$.
Es folgt also: $x = \log_2$ $= 4$. (weil $2^4 =$)

Definition: Die reelle Zahl x, mit der man eine reelle Zahl $b \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}$ potenzieren muss, um die reelle Zahl $u > 0$ zu erhalten, heißt der <u>Logarithmus von u zur Basis a</u>, geschrieben:
$x = \log_b u$ (manchmal auch: $_b\log u$)
Das heißt:
$x = \log_b u$ ist äquivalent zu $b^x = u$
Merke: Der Logarithmus liefert immer den Exponenten!

Spezielle Schreibweisen: $\log_{10} = \lg$; $\log_2 = \mathrm{ld} = \mathrm{lb}$

daraus folgt:

1) $b\ \ = 1 \Rightarrow \log_b 1 =$
2) $b\ \ = b \Rightarrow \log_b b =$
3) $b\ \ = \frac{1}{b} \Rightarrow \log_b\left(\frac{1}{b}\right) =$
4) $b\ \ = \sqrt{b} \Rightarrow \log_b\sqrt{b} =$

Allgemein gilt:

$$\log_b b^x = x \text{ und } b^{\log_b x} = x$$

„Logarithmieren“ ist also die Umkehroperation zum „potenzieren“.
(Genauso wie z. B. Wurzel ziehen die Umkehroperation zum Quadrieren ist).

Rechengesetze: (im Folgenden sind $b \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}$, $u,v \in \mathbb{R}^+$ und $x,y \in \mathbb{R}$)

1) $b^x \cdot b^y = b^{x+y} \Rightarrow \log_b(b^x \cdot b^y) = \log_b(b^{x+y}) = x + y = \log_b b^x + \log_b b^y \Rightarrow \log_b(u \cdot v) = \log_b u + \log_b v$
2) $b^x : b^y = b^{x-y} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \log_b(u:v) = \log_b u - \log_b v$
3) $(b^x)^y = b^{x \cdot y} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \log_b(u^y) = y \cdot \log_b u$
4) $c^x = u \Rightarrow \log_b c^x = \log_b u \Rightarrow x \cdot \log_b c = \log_b u \Rightarrow x = \frac{\log_b u}{\log_b c} \Rightarrow \log_c u = \frac{\log_b u}{\log_b c}$
   („Basisumrechnung“; Beispiel: $\log_3 20 = \frac{\lg 20}{\lg 3} \approx 2{,}727$)