

Grundlagen zu Logarithmen

Beispiel: Eine Bakterienanzahl verdoppelt sich jede Stunde. Anfangs waren es 1000; wann sind es 16000?

Gesucht ist also die Zahl x , mit der man 2 potenzieren muss, um zu erhalten. Diese Zahl nennt man den Logarithmus von zur Basis 2 und schreibt $x = \log_2$.

Es folgt also: $x = \log_2 = 4$. (weil $2^4 =$)

Definition: Die reelle Zahl x , mit der man eine reelle Zahl $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ potenzieren muss, um die reelle Zahl $u > 0$ zu erhalten, heißt der Logarithmus von u zur Basis a , geschrieben:

$$x = \log_b u \text{ (manchmal auch: } {}_b \log u \text{)}$$

Das heißt:

$$x = \log_b u \text{ ist äquivalent zu } b^x = u$$

Merke: Der Logarithmus liefert immer den Exponenten!

Spezielle Schreibweisen: $\log_{10} = \lg$ (auf dem TR: LOG); $\log_2 = \lg = \lg$

daraus folgt:

- 1) $b = 1 \rightarrow \log_b 1 =$
- 2) $b = b \rightarrow \log_b b =$
- 3) $b = \frac{1}{b} \rightarrow \log_b \left(\frac{1}{b}\right) =$
- 4) $b = \sqrt{b} \rightarrow \log_b \sqrt{b} =$

Allgemein gilt:

$$\log_b b^x = x \text{ und } b^{\log_b x} = x$$

„Logarithmieren“ ist also die Umkehroperation zum „Potenzieren“.

(Genauso wie Wurzel ziehen die Umkehroperation zum Quadrieren ist: $\sqrt{x^2} = x$ und $(\sqrt{x})^2 = x$.)

Rechengesetze: (im Folgenden sind $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, $u, v \in \mathbb{R}^+$ und $x, y \in \mathbb{R}$)

- 1) $b^x \cdot b^y = b^{x+y} \rightarrow \log_b(b^x \cdot b^y) = \log_b(b^{x+y}) = x + y = \log_b b^x + \log_b b^y \rightarrow \boxed{\log_b(u \cdot v) = \log_b u + \log_b v}$
- 2) $b^x : b^y = b^{x-y} \rightarrow \dots \rightarrow \boxed{\log_b(u : v) = \log_b u - \log_b v}$
- 3) $(b^x)^y = b^{x \cdot y} \rightarrow \dots \rightarrow \boxed{\log_b(u^y) = y \cdot \log_b u}$
- 4) $c^x = u \rightarrow \log_b c^x = \log_b u \rightarrow x \cdot \log_b c = \log_b u \rightarrow x = \frac{\log_b u}{\log_b c} \rightarrow \boxed{\log_c u = \frac{\log_b u}{\log_b c}}$

(„Basisumrechnung“; Beispiel: $\log_3 20 = \frac{\lg 20}{\lg 3} \approx 2,727$; nur nötig, wenn der TR keine \log_{\square} -Taste hat!)