## Grundlagen der Algebra

### grundlegende Rechengesetze:

1) K(ommutativ)-Gesetze der Addition und der Multiplikation:

$$a + b = b + a$$
 und  $a \cdot b = b \cdot a$ ,

d. h. man kann beim Addieren und beim Multiplizieren die Reihenfolge beliebig vertauschen; gilt ähnlich auch bei Differenzen (Vorzeichen beachten!), aber nicht bei Quotienten!

### Beispiele:

- a) 3+4=4+3
- b) 2a 3b = -3b + 2a
- c)  $\sqrt{2} \pi \mathbf{r} \cdot \frac{h}{\sqrt{3}} = \frac{h}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2} \pi \mathbf{r}$
- 2) A(ssoziativ)-Gesetze der Addition und der Multiplikation:

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$
 und  $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot (b\cdot c)$ ,

d. h., beim Addieren und Multiplizieren von mehr als zwei Termen ist es egal, welche beiden Terme man zuerst addiert bzw. multipliziert, Klammern können beliebig gesetzt werden; gilt ähnlich bei Differenzen; zusammen mit dem Kommutativgesetz folgt: beim Addieren und Multiplizieren von beliebig vielen Termen ist die Reihenfolge egal.

### Beispiele:

- a) (3+4)+5=3+(4+5), denn (3+4)+5=7+5=12 und 3+(4+5)=3+9=12
- b) 2a + 3b a = (2a + 3b) a = (3b + 2a) a = 3b + (2a a) = 3b + a; hier wurden zuerst Klammern gesetzt, dann das K-, dann das A-Gesetz benutzt und am Schluss zusammengefasst
- c)  $0.5 \cdot a \cdot 2 \cdot \frac{1}{a} = 0.5 \cdot (a \cdot 2) \cdot \frac{1}{a} = 0.5 \cdot (2 \cdot a) \cdot \frac{1}{a} = (0.5 \cdot 2) \cdot (a \cdot \frac{1}{a}) = 1 \cdot 1 = 1$ ; hier wurden erst Klammern

gesetzt, dann das K-Gesetz benutzt, dann die Klammern neu gesetzt, und am Schluss zusammen gefasst; statt dessen hätte man auch gleich kürzer schreiben können:

$$0.5 \cdot a \cdot 2 \cdot \frac{1}{a} = 0.5 \cdot 2 \cdot a \cdot \frac{1}{a} = 1 \cdot 1 = 1$$
; oder ohne Zwischenschritte gleich:  $0.5 \cdot a \cdot 2 \cdot \frac{1}{a} = 1$ 

- d) Vorsicht bei Quotienten: (6.4):2 = 6.(4.2), **aber**  $6:(2.3) \neq (6.2).3$ , sondern = (6.2):3!
- 3) D(istributiv)-Gesetz:  $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ gilt auch entsprechend, wenn  $\cdot$  vor der Klammer steht:  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ gilt auch entsprechend, wenn in der Klammer – statt + steht:  $(a - b) \cdot c = a \cdot c - b$

gilt auch entsprechend, wenn in der Klammer – statt + steht:  $(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$  oder wenn dort mehr als zwei Terme stehen: z. B.  $(a - b + c) \cdot d = a \cdot d - b \cdot d + c \cdot d$  gilt auch entsprechend, wenn hinter der Klammer: statt · steht: (a + b) : c = a : c + b : c

gilt <u>nicht</u>, wenn vor der Klammer: steht! c : (a + b) <u>ist nicht gleich</u> c : a + c : b!

kann zum Ausmultiplizieren von Klammern und zum Ausklammern benutzt werden; Beispiele:

a) 
$$2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 2 \cdot (3 + 4)$$

b) 
$$\frac{4x+6}{2} = (4x+6): 2 = (4 \cdot x): 2+6: 2 = (4:2) \cdot x + 3 = 2 \cdot x + 3$$
 (so kürzt man in einer

Differenz oder Summe: mit dem D-Gesetz! außerdem noch A- und K-Gesetz verwendet)

- c)  $x \cdot (x^2 + 2x + 1) = x \cdot x^2 + x \cdot 2x + x \cdot 1 = x^3 + 2x^2 + x$  (auch K- und A-Gesetz verwendet)
- d)  $2a-a=2 \cdot a-1 \cdot a=(2-1) \cdot a=1 \cdot a=a$

#### Folgerungen:

• Steht nur ein + (oder nichts) vor einer Klammer, so wird sie mit +1 multipliziert, man kann die Klammern also einfach weglassen. Steht nur ein – vor einer Klammer, so wird sie mit –1 multipliziert, beim Auflösen der Klammer drehen sich also alle Vorzeichen um:

$$(a + b) + (c - d) - (e - f) = a + b + c - d - e + f$$

• Zwei Summen / Differenzen (in Klammern) werden miteinander multipliziert, indem man jeden Summanden der ersten Klammer mit jedem Summanden der zweiten multipliziert:

$$(a+b)\cdot(c+d) = a\cdot(c+d) + b\cdot(c+d) = a\cdot c + a\cdot d + b\cdot c + b\cdot d$$

Terme zusammenfassen: Grundsätzlich gilt für die Reihenfolge: PUNKT VOR STRICH, also:

1) Zunächst fasst man mit Hilfe des Kommutativ- und des Assoziativgesetzes der Multiplikation alle Produkte zusammen; dabei schreibt man zunächst alle Zahlen nach vorne, alle Variablen nach hinten (beachte: z. B.  $\pi$  ist auch eine Zahl!) und fasst diese jeweils getrennt zusammen; beachte dabei auch die Potenzgesetze!

Beispiel:

$$2 \pi a \cdot 2a - 3a \cdot 5a + \pi a^2 = 2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot a \cdot a - 3 \cdot 5 \cdot a \cdot a + \pi a^2 = 4 \pi a^2 - 15 a^2 + \pi a^2$$

2) Danach fasst man mit Hilfe des Distributivgesetzes (und evtl. des Kommutativ- und Assoziativgesetzes der Addition) die Summe zusammen.

im Beispiel:

$$4 \pi a^2 - 15 a^2 + \pi a^2 = 4 \pi a^2 + \pi a^2 - 15 a^2 = (4 \pi + \pi - 15) \cdot a^2 = (5 \pi - 15) a^2 = 5 (\pi - 3) a^2$$

wichtig ist hier auch der Begriff des "gleichartigen Terms": zwei Terme sind gleichartig, wenn sie sich nur um einen Zahlenfaktor unterscheiden (also sind z. B.  $2x^2yz^3$  und  $-1,5x^2yz^3$  gleichartig, aber  $x^2$  und x sind nicht gleichartig!); gleichartige Terme fasst man zusammen, indem man einfach die Zahlenfaktoren addiert oder subtrahiert und den Rest des Terms stehen lässt (diese Regel folgt direkt aus dem D-Gesetz)! Nichtgleichartige Terme kann man dagegen (so) nicht zusammenfassen!

Beispiel:

$$2 x^2 y z^3 - 1.5x^2 y z^3 = (2 - 1.5) x^2 y z^3 = 0.5 x^2 y z^3$$
; dagegen ist  $x^2 + x$  nicht etwa gleich  $3x$ , gleich  $2x^2$ , gleich  $2x$ , oder was auch immer ähnliches!

### Aufgaben:

1. Fassen Sie soweit wie möglich zusammen:

a) 
$$2 \cdot 3 \cdot 0.5 \cdot \frac{1}{3}$$
 b)  $-5 \cdot a \cdot \pi \cdot 0.2 \cdot a^2$  c)  $2a \cdot b \cdot (-0.25) \cdot b^2 \cdot 3 \cdot a$ 

2. Fassen Sie soweit wie möglich zusammen:

a) 
$$5x + x$$
 b)  $23d^2 - 15 d^2$  c)  $10y - 1 - 2y$  d)  $5x + 3x + y$  e)  $85 v - 13 u - 12 v$  f)  $11k + 12n + 3m - n - 2k + m$  g)  $3\pi + 2a + a - 2\pi$  h)  $4x^2 - 6 + 5x - 4 + x^2 - 17x$ 

3. Fassen Sie soweit wie möglich zusammen:

a) 
$$2a \cdot 3b + 3x \cdot (-2y) - 0.5a \cdot 2b$$
 b)  $x^2 \cdot 0.2 \cdot (-5y) + 3x \cdot y \cdot \frac{1}{3}x$  c)  $100 - 5a^2 + \frac{1}{3}\pi a \cdot 2a$  d)  $\frac{1}{3}\pi \cdot a^2 \cdot a + \pi \cdot a^2 \cdot 2a + \frac{2}{3}\pi a^3$  e)  $2b \cdot 2b + 3b \cdot b + 0.5 \cdot \pi \cdot b \cdot b - \pi b^2 + b^2$ 

4. Lösen Sie die Klammern auf und vereinfachen Sie soweit wie möglich:

a) 
$$(2b-2c)+(2b+2c)$$
 b)  $x-(-y+z)$  c)  $5a-[2b-(5a-b)]$  d)  $4\cdot(a+b)-3(a-b)$  e)  $-4a^2\cdot(2a-3b)$  f)  $1-xy\cdot(ax+by)$  g)  $(7x+2y)\cdot(6-a)$  h)  $(x+2)(x-3)(x^2+1)$ 

5. Klammern Sie wie angeben aus:

a) 
$$x + y - z = -(...)$$
  
b)  $0.5 x + 2y - z = 0.5 (...)$   
c)  $\frac{1}{2}a - \frac{1}{6}b + \frac{1}{3}c = \frac{1}{3} (...)$   
d)  $x^2 + 2x = x (...)$   
e)  $-x^4 + 3x^2 = -x^2 (...)$   
f)  $0.5x^7 + 3x^4 - x = x (...)$ 

6. Klammern Sie soviel wie möglich aus:

a) 
$$4 c^2 + 12 x$$
 b)  $2 a b - a^2$  c)  $3 x^2 - 9 x y$  d)  $2 x^5 - 6 x^4 + 4 x^3$  e)  $1 + x + x^2$  f)  $a \cdot (x + y) + b \cdot (x + y)$  g)  $A^2 + 16 (y + 2) A$  h)  $3 (b - 1) + (b - 1)^2$ 

# Lösungen

1.

a) 1 b)  $-\pi a^3$  c)  $-1.5a^2b^3$ 

2.

b) 8d<sup>2</sup> a) 6x

c) 8y - 1

d) 8x + y e) 73 v - 13 u

g)  $\pi + 3a$ 

h)  $5x^2 - 12x - 10$ 

a) 5ab - 6xy b) 0 3.

c)  $100 + (\frac{2}{3}\pi - 5)a^2$ 

d)  $3\pi a^{3}$ 

e)  $(7 + 0.5\pi)$  bh  $-\pi$  b<sup>2</sup> + h<sup>2</sup>

4.

f) 9k + 11n + 4m

a) 4b b) x + y - z c) 10a - 3b d) a + 7b e)  $-8a^3 + 12a^2b$  f)  $1 - ax^2y - bxy^2$  g) 42x - 7ax + 12y - 2ay h)  $x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6$ 

5.

a) -(-x-y+z) b) 0.5(x+4y-2z) c)  $\frac{1}{3}(1.5a-0.5b+c)$ 

d) x (x + 2) e)  $-x^2 (x^2 - 3)$  f)  $x (0.5x^6 + 3x^3 - 1)$ 

6.

a)  $4 (c^2 + 3x)$ b) a (2b - a)f)  $(a + b) \cdot (x + y)$ 

c) 3x (x-3y) d)  $2x^3 (x^2-3x+2)$  g) A (A + 16 (y + 2))

h) (b-1)(3+(b-1))=(b-1)(b+2)