<u>Grundlagen der Algebra</u>

<u>grundlegende Rechengesetze:</u>

1) K(ommutativ)-Gesetze der Addition und der Multiplikation:

$$a + b = b + a \qquad \text{und} \qquad a \cdot b = b \cdot a,$$

d. h. man kann beim Addieren und beim Multiplizieren die Reihenfolge beliebig vertauschen; gilt ähnlich auch bei Differenzen (Vorzeichen beachten!), aber nicht bei Quotienten!

Beispiele:
a) $3 + 4 = 4 + 3$
b) $2a – 3b = – 3b + 2a$
c) $\sqrt{2}\,\pi\, r \cdot \frac{h}{\sqrt{3}} = \frac{h}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2}\,\pi\, r$

2) A(ssoziativ)-Gesetze der Addition und der Multiplikation:

$$(a + b) + c = a + (b + c) \qquad \text{und} \qquad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c),$$

d. h., beim Addieren und Multiplizieren von mehr als zwei Termen ist es egal, welche beiden Terme man zuerst addiert bzw. multipliziert, Klammern können beliebig gesetzt werden; gilt ähnlich bei Differenzen; zusammen mit dem Kommutativgesetz folgt: beim Addieren und Multiplizieren von beliebig vielen Termen ist die Reihenfolge egal.

Beispiele:
a) $(3 + 4) + 5 = 3 + (4 + 5)$, denn $(3 + 4) + 5 = 7 + 5 = 12$ und $3 + (4 + 5) = 3 + 9 = 12$
b) $2a + 3b – a = (2a + 3b) – a = (3b + 2a) – a = 3b + (2a – a) = 3b + a$; hier wurden zuerst Klammern gesetzt, dann das K-, dann das A-Gesetz benutzt und am Schluss zusammen gefasst
c) $0{,}5 \cdot a \cdot 2 \cdot \frac{1}{a} = 0{,}5 \cdot (a \cdot 2) \cdot \frac{1}{a} = 0{,}5 \cdot (2 \cdot a) \cdot \frac{1}{a} = (0{,}5 \cdot 2) \cdot (a \cdot \frac{1}{a}) = 1 \cdot 1 = 1$; hier wurden erst Klammern gesetzt, dann das K-Gesetz benutzt, dann die Klammern neu gesetzt, und am Schluss zusammen gefasst; statt dessen hätte man auch gleich kürzer schreiben können:
$0{,}5 \cdot a \cdot 2 \cdot \frac{1}{a} = 0{,}5 \cdot 2 \cdot a \cdot \frac{1}{a} = 1 \cdot 1 = 1$; oder ohne Zwischenschritte gleich: $0{,}5 \cdot a \cdot 2 \cdot \frac{1}{a} = 1$
d) Vorsicht bei Quotienten: $(6 \cdot 4):2 = 6 \cdot (4:2)$, ***aber*** $6:(2 \cdot 3) \neq (6:2) \cdot 3$, sondern $= (6:2):3$!

3) D(istributiv)-Gesetz: $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
gilt auch entsprechend, wenn · vor der Klammer steht: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
gilt auch entsprechend, wenn in der Klammer – statt + steht: $(a – b) \cdot c = a \cdot c – b \cdot c$
oder wenn dort mehr als zwei Terme stehen: z. B. $(a – b + c) \cdot d = a \cdot d – b \cdot d + c \cdot d$
gilt auch entsprechend, wenn hinter der Klammer **:** statt · steht: $(a + b) : c = a : c + b : c$
gilt ***<u>nicht</u>***, wenn vor der Klammer **:** steht! $c : (a + b)$ ***<u>ist nicht gleich</u>*** $c : a + c : b$!

kann zum Ausmultiplizieren von Klammern und zum Ausklammern benutzt werden; Beispiele:
a) $2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 2 \cdot (3 + 4)$
b) $\frac{4x+6}{2} = \frac{4x}{2} + \frac{6}{2} = (4 \cdot x) : 2 + 3 = (4 : 2) \cdot x + 3 = 2\,x + 3$ (***<u>so</u>*** kürzt man in einer Differenz oder Summe: mit dem D-Gesetz! außerdem noch A- und K-Gesetz verwendet); alternativ:
$\frac{4x+6}{2} = \frac{2 \cdot (2x+3)}{2} = 2x+3$ (man klammert erst das aus, was man kürzen will)
c) $x \cdot (x^2 + 2x + 1) = x \cdot x^2 + x \cdot 2x + x \cdot 1 = x^3 + 2x^2 + x$ (auch K- und A-Gesetz verwendet)
d) $2\,a – a = 2 \cdot a – 1 \cdot a = (2 – 1) \cdot a = 1 \cdot a = a$

Folgerung: Zwei Summen / Differenzen (in Klammern) werden miteinander multipliziert, indem man jeden Summanden der ersten Klammer mit jedem Summanden der zweiten multipliziert:

$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot (c + d) + b \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$$

<u>Terme zusammenfassen:</u> Grundsätzlich gilt für die Reihenfolge: ***PUNKT VOR STRICH***, also:
1) Zunächst fasst man mit Hilfe des Kommutativ- und des Assoziativgesetzes der Multiplikation alle Produkte zusammen; dabei schreibt man zunächst alle Zahlen nach vorne, alle Variablen nach hinten (beachte: z. B. π ist auch eine Zahl!) und fasst diese jeweils getrennt zusammen; beachte dabei auch die Potenzgesetze!

Beispiel:
$2\pi a \cdot 2a - 3a \cdot 5a + \pi a^2 = 2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot a \cdot a - 3 \cdot 5 \cdot a \cdot a + \pi a^2 = 4\pi a^2 - 15 a^2 + \pi a^2$

2) Danach fasst man mit Hilfe des Distributivgesetzes (und evtl. des Kommutativ- und Assoziativgesetzes der Addition) die Summe zusammen.

im Beispiel:
$4\pi a^2 - 15 a^2 + \pi a^2 = 4\pi a^2 + \pi a^2 - 15 a^2 = (4\pi + \pi - 15) \cdot a^2 = (5\pi - 15) a^2 = 5(\pi - 3) a^2$

wichtig ist hier auch der Begriff des „gleichartigen Terms“: zwei Terme sind gleichartig, wenn sie sich nur um einen Zahlenfaktor unterscheiden (also sind z. B. $2x^2yz^3$ und $-1{,}5x^2yz^3$ gleichartig, aber x^2 und x sind nicht gleichartig!); **gleichartige Terme fasst man zusammen, indem man einfach die Zahlenfaktoren addiert oder subtrahiert und den Rest des Terms stehen lässt** (diese Regel folgt direkt aus dem D-Gesetz)! Nicht-gleichartige Terme kann man dagegen (so) nicht zusammenfassen!

Beispiel:
$2x^2yz^3 - 1{,}5x^2yz^3 = (2 - 1{,}5)x^2yz^3 = 0{,}5x^2yz^3$; dagegen ist $x^2 + x$ ***<u>nicht</u>*** etwa gleich 3x, gleich x^3, gleich $2x^2$, gleich 2x, oder was auch immer ähnliches!

<u>Aufgaben:</u>
1. Fassen Sie soweit wie möglich zusammen:
a) $2 \cdot 3 \cdot 0{,}5 \cdot \frac{1}{3}$ b) $-5 \cdot a \cdot \pi \cdot 0{,}2 \cdot a^2$ c) $2a \cdot b \cdot (-0{,}25) \cdot b^2 \cdot 3 \cdot a$

2. Fassen Sie soweit wie möglich zusammen:
a) $5x + x$ b) $23d^2 - 15d^2$ c) $10y - 1 - 2y$ d) $5x + 3x + y$ e) $85v - 13u - 12v$
f) $11k + 12n + 3m - n - 2k + m$ g) $3\pi + 2a + a - 2\pi$ h) $4x^2 - 6 + 5x - 4 + x^2 - 17x$

3. Fassen Sie soweit wie möglich zusammen:
a) $2a \cdot 3b + 3x \cdot (-2y) - 0{,}5a \cdot 2b$ b) $x^2 \cdot 0{,}2 \cdot (-5y) + 3x \cdot y \cdot \frac{1}{3}x$ c) $100 - 5a^2 + \frac{1}{3}\pi a \cdot 2a$
d) $\frac{1}{3}\pi \cdot a^2 \cdot a + \pi \cdot a^2 \cdot 2a + \frac{2}{3}\pi a^3$ e) $2b \cdot 2h + 3b \cdot h + 0{,}5 \cdot \pi \cdot b \cdot h - \pi b^2 + h^2$

4. Lösen Sie die Klammern auf und vereinfachen Sie soweit wie möglich:
a) $(2b - 2c) + (2b + 2c)$ b) $x - (-y + z)$ c) $5a - [2b - (5a - b)]$ d) $a \cdot (b + c - d)$
e) $4 \cdot (a + b) - 3(a - b)$ f) $-4a^2 \cdot (2a - 3b)$ g) $1 - xy \cdot (ax + by)$ h) $(7x + 2y) \cdot (6 - a)$

5. Klammern Sie wie angeben aus:
a) $x + y - z = -(...)$ b) $0{,}5x + 2y - z = 0{,}5(...)$ c) $\frac{1}{2}a - \frac{1}{6}b + \frac{1}{3}c = \frac{1}{3}(...)$
d) $x^2 + 2x = x(...)$ e) $-x^4 + 3x^2 = -x^2(...)$ f) $0{,}5x^7 + 3x^4 - x = x(...)$

6. Klammern Sie soviel wie möglich aus:
a) $4c^2 + 12x$ b) $2ab - a^2$ c) $3x^2 - 9xy$ d) $2x^5 - 6x^4 + 4x^3$ e) $1 + x + x^2$
f) $a \cdot (x + y) + b \cdot (x + y)$ g) $A^2 + 16(y + 2)A$ h) $3(b - 1) + (b - 1)^2$

Lösungen

1. a) 1 b) $-\pi a^3$ c) $-1{,}5a^2b^3$

2. a) $6x$ b) $8d^2$ c) $8y - 1$ d) $8x + y$ e) $73\,v - 13\,u$
f) $9k + 11n + 4m$ g) $\pi + 3a$ h) $5x^2 - 12x - 10$

3. a) $5ab - 6xy$ b) 0 c) $100 + (\frac{2}{3}\pi - 5)a^2$
d) $3\pi a^3$ e) $(7 + 0{,}5\pi)\,bh - \pi\,b^2 + h^2$

4. a) $4b$ b) $x + y - z$ c) $10a - 3b$ d) $ab + ac - ad$
e) $a + 7b$ f) $-8a^3 + 12a^2b$ g) $1 - ax^2y - bxy^2$ h) $42x - 7ax + 12y - 2ay$

5. a) $-(-x - y + z)$ b) $0{,}5\,(x + 4y - 2z)$ c) $\frac{1}{3}(1{,}5a - 0{,}5b + c)$
d) $x\,(x + 2)$ e) $-x^2\,(x^2 - 3)$ f) $x\,(0{,}5x^6 + 3x^3 - 1)$

6. a) $4\,(c^2 + 3x)$ b) $a\,(2b - a)$ c) $3x\,(x - 3y)$ d) $2x^3\,(x^2 - 3x + 2)$
e) –
f) $(a + b) \cdot (x + y)$ g) $A\,(A + 16\,(y + 2)\,)$
h) $(b - 1)\,(3 + (b - 1)\,) = (b - 1)\,(b + 2)$