

Grundlagen der Algebra

grundlegende Rechengesetze:

- 1) K(ommutativ)-Gesetze der Addition und der Multiplikation:

$$a + b = b + a \quad \text{und} \quad a \cdot b = b \cdot a,$$

d. h. man kann beim Addieren und beim Multiplizieren die Reihenfolge beliebig vertauschen; gilt ähnlich auch bei Differenzen (Vorzeichen beachten!), aber nicht bei Quotienten!

Beispiele:

a) $3 + 4 = 4 + 3$

b) $2a - 3b = -3b + 2a$

c) $\sqrt{2} \pi r \cdot \frac{h}{\sqrt{3}} = \frac{h}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2} \pi r$

- 2) A(ssoziativ)-Gesetze der Addition und der Multiplikation:

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad \text{und} \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c),$$

d. h., beim Addieren und Multiplizieren von mehr als zwei Termen ist es egal, welche beiden Terme man zuerst addiert bzw. multipliziert, Klammern können beliebig gesetzt werden; gilt ähnlich bei Differenzen; zusammen mit dem Kommutativgesetz folgt: beim Addieren und Multiplizieren von beliebig vielen Termen ist die Reihenfolge egal.

Beispiele:

a) $(3 + 4) + 5 = 3 + (4 + 5)$, denn $(3 + 4) + 5 = 7 + 5 = 12$ und $3 + (4 + 5) = 3 + 9 = 12$

b) $2a + 3b - a = (2a + 3b) - a = (3b + 2a) - a = 3b + (2a - a) = 3b + a$; hier wurden zuerst Klammern gesetzt, dann das K-, dann das A-Gesetz benutzt und am Schluss zusammengefasst

c) $0,5 \cdot a \cdot 2 \cdot \frac{1}{a} = 0,5 \cdot (a \cdot 2) \cdot \frac{1}{a} = 0,5 \cdot (2 \cdot a) \cdot \frac{1}{a} = (0,5 \cdot 2) \cdot (a \cdot \frac{1}{a}) = 1 \cdot 1 = 1$; hier wurden erst Klammern gesetzt, dann das K-Gesetz benutzt, dann die Klammern neu gesetzt, und am Schluss zusammengefasst; statt dessen hätte man auch gleich kürzer schreiben können:

$$0,5 \cdot a \cdot 2 \cdot \frac{1}{a} = 0,5 \cdot 2 \cdot a \cdot \frac{1}{a} = 1 \cdot 1 = 1; \text{ oder ohne Zwischenschritte gleich: } 0,5 \cdot a \cdot 2 \cdot \frac{1}{a} = 1$$

d) Vorsicht bei Quotienten: $(6 \cdot 4) : 2 = 6 \cdot (4 : 2)$, **aber** $6 : (2 \cdot 3) \neq (6 : 2) \cdot 3$, sondern $= (6 : 2) : 3$!

- 3) D(istributiv)-Gesetz: $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

gilt auch entsprechend, wenn \cdot vor der Klammer steht: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

gilt auch entsprechend, wenn in der Klammer – statt + steht: $(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$

oder wenn dort mehr als zwei Terme stehen: z. B. $(a - b + c) \cdot d = a \cdot d - b \cdot d + c \cdot d$

gilt auch entsprechend, wenn hinter der Klammer : statt \cdot steht: $(a + b) : c = a : c + b : c$

gilt **nicht**, wenn vor der Klammer : steht! $c : (a + b)$ **ist nicht gleich** $c : a + c : b$!

kann zum Ausmultiplizieren von Klammern und zum Ausklammern benutzt werden; Beispiele:

a) $2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 2 \cdot (3 + 4)$

b) $\frac{4x+6}{2} = (4x+6) : 2 = (4 \cdot x) : 2 + 6 : 2 = (4 : 2) \cdot x + 3 = 2x + 3$ (**so** kürzt man in einer

Differenz oder Summe: mit dem D-Gesetz! außerdem noch A- und K-Gesetz verwendet)

c) $x \cdot (x^2 + 2x + 1) = x \cdot x^2 + x \cdot 2x + x \cdot 1 = x^3 + 2x^2 + x$ (auch K- und A-Gesetz verwendet)

d) $2a - a = 2 \cdot a - 1 \cdot a = (2 - 1) \cdot a = 1 \cdot a = a$

Folgerungen:

- Steht nur ein + (oder nichts) vor einer Klammer, so wird sie mit +1 multipliziert, man kann die Klammern also einfach weglassen. Steht nur ein – vor einer Klammer, so wird sie mit –1 multipliziert, beim Auflösen der Klammer drehen sich also alle Vorzeichen um:

$$(a + b) + (c - d) - (e - f) = a + b + c - d - e + f$$

- Zwei Summen / Differenzen (in Klammern) werden miteinander multipliziert, indem man jeden Summanden der ersten Klammer mit jedem Summanden der zweiten multipliziert:

$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot (c + d) + b \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$$

Terme zusammenfassen: Grundsätzlich gilt für die Reihenfolge: **PUNKT VOR STRICH**, also:

1) Zunächst fasst man mit Hilfe des Kommutativ- und des Assoziativgesetzes der Multiplikation alle Produkte zusammen; dabei schreibt man zunächst alle Zahlen nach vorne, alle Variablen nach hinten (beachte: z. B. π ist auch eine Zahl!) und fasst diese jeweils getrennt zusammen; beachte dabei auch die Potenzgesetze!

Beispiel:

$$2 \pi a \cdot 2a - 3a \cdot 5a + \pi a^2 = 2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot a \cdot a - 3 \cdot 5 \cdot a \cdot a + \pi a^2 = 4 \pi a^2 - 15 a^2 + \pi a^2$$

2) Danach fasst man mit Hilfe des Distributivgesetzes (und evtl. des Kommutativ- und Assoziativgesetzes der Addition) die Summe zusammen.

im Beispiel:

$$4 \pi a^2 - 15 a^2 + \pi a^2 = 4 \pi a^2 + \pi a^2 - 15 a^2 = (4 \pi + \pi - 15) \cdot a^2 = (5 \pi - 15) a^2 = 5 (\pi - 3) a^2$$

wichtig ist hier auch der Begriff des „gleichartigen Terms“: zwei Terme sind gleichartig, wenn sie sich nur um einen Zahlenfaktor unterscheiden (also sind z. B. $2x^2yz^3$ und $-1,5x^2yz^3$ gleichartig, aber x^2 und x sind nicht gleichartig!); **gleichartige Terme fasst man zusammen, indem man einfach die Zahlenfaktoren addiert oder subtrahiert und den Rest des Terms stehen lässt** (diese Regel folgt direkt aus dem D-Gesetz)! Nicht-gleichartige Terme kann man dagegen (so) nicht zusammenfassen!

Beispiel:

$$2 x^2 y z^3 - 1,5x^2 y z^3 = (2 - 1,5) x^2 y z^3 = 0,5 x^2 y z^3; \text{ dagegen ist } x^2 + x \text{ nicht etwa gleich } 3x, \text{ gleich } x^3, \text{ gleich } 2x^2, \text{ gleich } 2x, \text{ oder was auch immer ähnliches!}$$

Aufgaben:

1. Fassen Sie soweit wie möglich zusammen:

a) $2 \cdot 3 \cdot 0,5 \cdot \frac{1}{3}$ b) $-5 \cdot a \cdot \pi \cdot 0,2 \cdot a^2$ c) $2a \cdot b \cdot (-0,25) \cdot b^2 \cdot 3 \cdot a$

2. Fassen Sie soweit wie möglich zusammen:

a) $5x + x$ b) $23d^2 - 15 d^2$ c) $10y - 1 - 2y$ d) $5x + 3x + y$ e) $85 v - 13 u - 12 v$
f) $11k + 12n + 3m - n - 2 k + m$ g) $3\pi + 2a + a - 2\pi$ h) $4x^2 - 6 + 5x - 4 + x^2 - 17x$

3. Fassen Sie soweit wie möglich zusammen:

a) $2a \cdot 3b + 3x \cdot (-2y) - 0,5a \cdot 2b$ b) $x^2 \cdot 0,2 \cdot (-5y) + 3x \cdot y \cdot \frac{1}{3}x$ c) $100 - 5 a^2 + \frac{1}{3} \pi a \cdot 2a$
d) $\frac{1}{3} \pi \cdot a^2 \cdot a + \pi \cdot a^2 \cdot 2a + \frac{2}{3} \pi a^3$ e) $2b \cdot 2h + 3b \cdot h + 0,5 \cdot \pi \cdot b \cdot h - \pi b^2 + h^2$

4. Lösen Sie die Klammern auf und vereinfachen Sie soweit wie möglich:

a) $(2b - 2c) + (2b + 2c)$ b) $x - (-y + z)$ c) $5a - [2b - (5a - b)]$ d) $a \cdot (b + c - d)$
e) $4 \cdot (a + b) - 3 (a - b)$ f) $-4a^2 \cdot (2a - 3b)$ g) $1 - xy \cdot (ax + by)$ h) $(7x + 2y) \cdot (6 - a)$

5. Klammern Sie wie angegeben aus:

a) $x + y - z = -(\dots)$ b) $0,5 x + 2y - z = 0,5 (\dots)$ c) $\frac{1}{2}a - \frac{1}{6}b + \frac{1}{3}c = \frac{1}{3} (\dots)$
d) $x^2 + 2 x = x (\dots)$ e) $-x^4 + 3 x^2 = -x^2 (\dots)$ f) $0,5 x^7 + 3 x^4 - x = x (\dots)$

6. Klammern Sie soviel wie möglich aus:

a) $4 c^2 + 12 x$ b) $2 a b - a^2$ c) $3 x^2 - 9 x y$ d) $2 x^5 - 6 x^4 + 4 x^3$ e) $1 + x + x^2$
f) $a \cdot (x + y) + b \cdot (x + y)$ g) $A^2 + 16 (y + 2) A$ h) $3 (b - 1) + (b - 1)^2$

Lösungen

1. a) 1 b) $-\pi a^3$ c) $-1,5a^2b^3$
2. a) $6x$ b) $8d^2$ c) $8y - 1$ d) $8x + y$ e) $73v - 13u$
f) $9k + 11n + 4m$ g) $\pi + 3a$ h) $5x^2 - 12x - 10$
3. a) $5ab - 6xy$ b) 0 c) $100 + (\frac{2}{3}\pi - 5)a^2$
d) $3\pi a^3$ e) $(7 + 0,5\pi)bh - \pi b^2 + h^2$
4. a) $4b$ b) $x + y - z$ c) $10a - 3b$ d) $ab + ac - ad$
e) $a + 7b$ f) $-8a^3 + 12a^2b$ g) $1 - ax^2y - bxy^2$ h) $42x - 7ax + 12y - 2ay$
5. a) $-(-x - y + z)$ b) $0,5(x + 4y - 2z)$ c) $\frac{1}{3}(1,5a - 0,5b + c)$
d) $x(x + 2)$ e) $-x^2(x^2 - 3)$ f) $x(0,5x^6 + 3x^3 - 1)$
6. a) $4(c^2 + 3x)$ b) $a(2b - a)$ c) $3x(x - 3y)$ d) $2x^3(x^2 - 3x + 2)$
e) $-$ f) $(a + b) \cdot (x + y)$ g) $A(A + 16(y + 2))$
h) $(b - 1)(3 + (b - 1)) = (b - 1)(b + 2)$