Grundbegriffe zur Stochastik

Ein Zufallsexperiment ist ein Vorgang, der unter immer gleichartigen Bedingungen abläuft, dessen Ausgang sich aber nicht vorhersagen lässt (i. A. weil nicht alle Ursachen und beeinflussende Faktoren bekannt sind bzw. auf komplizierte Art wirken).

Beispiele:

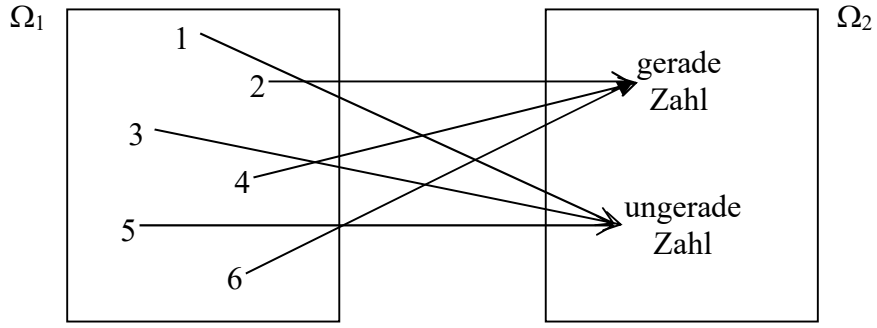
usw. usf.

Jeden möglichen Ausgang eines Zufallsexperiments nennt man ein Ergebnis ω (*kleiner griechischer Buchstabe omega*) des Experiments; die Menge aller möglichen Ergebnisse heißt Ergebnisraum Ω (*großer griechischer Buchstabe Omega*); jedem möglichen Ausgang ist also genau ein Element aus Ω zugeordnet. Die Anzahl der möglichen Ergebnisse heißt die Mächtigkeit von Ω, geschrieben: $|\Omega|$.

Beispiel: Würfeln
Ergebnisraum: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Ergebnisse: $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 2$, $\omega_3 = 3$, $\omega_4 = 4$, $\omega_5 = 5$, $\omega_6 = 6$
Mächtigkeit: $|\Omega| = 6$

Verfeinerung/Vergröberung:
Für jedes Zufallsexperiment gibt es i. A. mehrere Ergebnisräume (je nachdem, was interessiert), zum Beispiel beim Würfeln:
$\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$\Omega_2 = \{\text{gerade Zahl, ungerade Zahl}\}$
$\Omega_3 = \{\text{Zahl kleiner 3, Zahl größer gleich 3}\}$
usw.

Ω_2 und Ω_3 enthalten hier weniger Informationen darüber, wie das Zufallsexperiment ausgegangen ist, als Ω_1, sie sind also „gröber“, wohingegen Ω_1 „feiner“ ist. Zwischen den Ergebnisräumen gibt es eine eindeutige Zuordnung (*also eine Funktion*!), darstellbar z. B. mit einem Mengendiagramm:



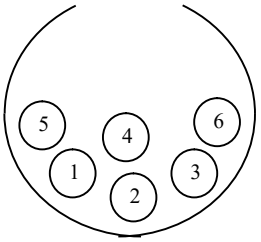
Allgemein definiert man: Sind Ω_1 und Ω_2 zwei Ergebnisräume eines Zufallsexperiments mit $|\Omega_1| > |\Omega_2|$ (*d. h., Ω_1 ist größer als Ω_2, enthält mehr Ergebnisse)*, **und** (!) kann man jedem Element von Ω_1 genau ein Element von Ω_2 zuordnen, so heißt Ω_2 eine Vergröberung von Ω_1; umgekehrt heißt Ω_1 eine Verfeinerung von Ω_2. Anschaulich bedeutet die Vergröberung eines Ergebnisraums, dass man die Ergebnisse in Gruppen mit jeweils gleichen Eigenschaften („Äquivalenzklassen‘‘) zusammenfasst.

Mehrstufige Zufallsexperimente:
Ein Zufallsexperiment heißt mehrstufig, wenn es aus einfacheren Zufallsexperimenten zusammengesetzt ist, die gleichzeitig oder nacheinander durchgeführt werden.

Beispiele:

Zur Simulation mehrstufiger Zufallsexperimente können Urnenexperimente verwenden werden:
Eine Urne (eine „black box“, in die man nicht hinein sehen kann) enthält Kugeln, die den Ergebnissen eines Teilexperiments entsprechen; aus der Urne werden dann blind Kugeln gezogen.

Beispiel Würfeln:



Das Ziehen einer Kugel entspricht hier also dem Werfen eines Würfels.

Wenn man allerdings mit dieser Urne das Werfen von zwei Würfeln (bzw. das zweimalige Werfen eines Würfels) simulieren will, so hat man offensichtlich ein Problem: wenn z. B. beim ersten Mal eine 1 gezogen wurde, so kann beim zweiten Mal nicht wieder eine 1 gezogen werden (die Kugel ist ja nicht mehr in der Urne!); beim Würfeln dagegen kann man offensichtlich zweimal hintereinander eine 1 würfeln. Deswegen unterscheidet man bei Urnenexperimenten das „Ziehen mit bzw. ohne Zurücklegen“.

Für mehrstufige Zufallsexperimente heißt das:
mit Zurücklegen: bei jedem Teilexperiment sind dieselben Ergebnisse möglich (z. B. Würfeln)
ohne Zurücklegen: nur die Ergebnisse sind möglich, die vorher noch nicht auftraten (z. B. Lotto)
(*in der Realität gibt es oft Mischformen zwischen diesen beiden Möglichkeiten!*)

Außerdem muss man oft unterscheiden, ob die Reihenfolge der Ergebnisse wichtig ist oder nicht (z. B. beim Lottospielen ist es egal, in welcher Reihenfolge die Kugeln gezogen werden; beim Pokern kann es dagegen durchaus wichtig sein, in welcher Reihenfolge man die Karten erhält).

Beispiel: 2 Jacken auf 3 Kleiderhaken verteilen
Man kann als Ergebnisse die belegten Kleiderhaken angeben: $\Omega_1 = \{12, 13, 21, 23, 31, 32\}$
Oder man kann auch nur schauen, welcher Haken noch frei ist: $\Omega_2 = \{1, 2, 3\}$
Beim zweiten Ergebnisraum ist offensichtlich die Reihenfolge, in der die Jacken aufgehängt wurden, unwichtig.
(*auch hier gibt es in der Realität oft Mischformen!*)