

# Grundbegriffe zur Stochastik

Ein Zufallsexperiment ist ein Vorgang, der unter immer gleichartigen Bedingungen abläuft, dessen Ausgang sich aber nicht vorhersagen lässt (i. A. weil nicht alle Ursachen und beeinflussende Faktoren bekannt sind bzw. auf komplizierte Art wirken).

Beispiele:

- eine Münze oder einen Würfel werfen
- Lotto oder Roulette spielen
- Karten austeilen
- Geschlecht eines Kindes
- Umfrage-/Wahlergebnisse
- Geräte- oder medizinische Tests
- Autounfälle pro Woche
- radioaktiver Zerfall

usw. usf.

Jeden möglichen Ausgang eines Zufallsexperiments nennt man ein Ergebnis  $\omega$  (*kleiner griechischer Buchstabe omega*) des Experiments; die Menge aller möglichen Ergebnisse heißt Ergebnisraum  $\Omega$  (*großer griechischer Buchstabe Omega*); jedem möglichen Ausgang ist also genau ein Element aus  $\Omega$  zugeordnet. Die Anzahl der möglichen Ergebnisse heißt die Mächtigkeit von  $\Omega$ , geschrieben:  $|\Omega|$ .

**Beispiel:** Würfeln

Ergebnisraum:  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Ergebnisse:  $\omega_1 = 1, \omega_2 = 2, \omega_3 = 3, \omega_4 = 4, \omega_5 = 5, \omega_6 = 6$

Mächtigkeit:  $|\Omega| = 6$

Verfeinerung/Vergrößerung:

Für jedes Zufallsexperiment gibt es i. A. mehrere Ergebnisräume (je nachdem, was interessiert), zum Beispiel beim Würfeln:

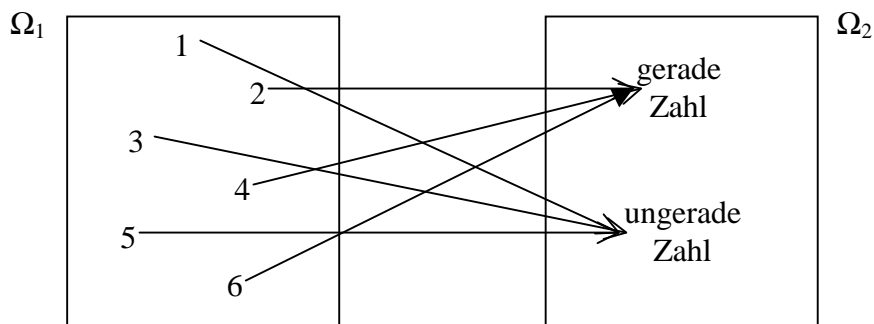
$\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\Omega_2 = \{\text{gerade Zahl, ungerade Zahl}\}$

$\Omega_3 = \{\text{Zahl kleiner 3, Zahl größer gleich 3}\}$

usw.

$\Omega_2$  und  $\Omega_3$  enthalten hier weniger Informationen darüber, wie das Zufallsexperiment ausgefallen ist, als  $\Omega_1$ , sie sind also „gröber“, wohingegen  $\Omega_1$  „feiner“ ist. Zwischen den Ergebnisräumen gibt es eine eindeutige Zuordnung (*also eine Funktion!*), darstellbar z. B. mit einem Mengendiagramm:



Allgemein definiert man: Sind  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  zwei Ergebnisräume eines Zufallsexperiments mit  $|\Omega_1| > |\Omega_2|$  (d. h.,  $\Omega_1$  ist größer als  $\Omega_2$ , enthält mehr Ergebnisse), **und** (!) kann man jedem Element von  $\Omega_1$  genau ein Element von  $\Omega_2$  zuordnen, so heißt  $\Omega_2$  eine Vergrößerung von  $\Omega_1$ ; umgekehrt heißt  $\Omega_1$  eine Verfeinerung von  $\Omega_2$ .

### Mehrstufige Zufallsexperimente:

Ein Zufallsexperiment heißt mehrstufig, wenn es aus einfacheren Zufallsexperimenten zusammengesetzt ist, die gleichzeitig oder nacheinander durchgeführt werden.

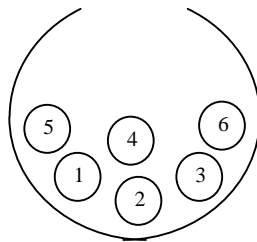
Beispiele:

- Tennisspiele: mehrere Sätze
- mehrere Würfel werfen bzw. einen Würfel mehrmals hintereinander
- mehrere Zahlen pro Lottoschein auswählen
- mehrere Kinder pro Familie
- Auswahl eines Autos: Farbe, Größe, Motor

Zur Simulation mehrstufiger Zufallsexperimente können Urnenexperimente verwendet werden:

Eine Urne (eine „black box“, in die man nicht hinein sehen kann) enthält Kugeln, die den Ergebnissen eines Telexperiments entsprechen; aus der Urne werden dann blind Kugeln gezogen.

Beispiel Würfeln:



Das Ziehen einer Kugel entspricht hier also dem Werfen eines Würfels.

Wenn man allerdings mit dieser Urne das Werfen von zwei Würfeln (bzw. das zweimalige Werfen eines Würfels) simulieren will, so hat man offensichtlich ein Problem: wenn z. B. beim ersten Mal eine 1 gezogen wurde, so kann beim zweiten Mal nicht wieder eine 1 gezogen werden (die Kugel ist ja nicht mehr in der Urne!); beim Würfeln dagegen kann man offensichtlich zweimal hintereinander eine 1 würfeln. Deswegen unterscheidet man zwischen Urnenexperimenten das „Ziehen mit bzw. ohne Zurücklegen“.

Für das mehrstufige Zufallsexperiment heißt das:

mit Zurücklegen: bei jedem Telexperiment sind dieselben Ergebnisse möglich (z. B. Würfeln)

ohne Zurücklegen: nur die Ergebnisse sind möglich, die vorher noch nicht auftraten (z. B. Lotto)

*(in der Realität gibt es oft Mischformen zwischen diesen beiden Möglichkeiten!)*

Außerdem muss man oft unterscheiden, ob die Reihenfolge der Ergebnisse wichtig ist oder nicht (z. B. beim Lottospielen ist es egal, in welcher Reihenfolge die Kugeln gezogen werden; beim Pokern kann es dagegen durchaus wichtig sein, in welcher Reihenfolge man die Karten erhält).

Beispiel: 2 Jacken auf 3 Kleiderhaken verteilen

Man kann als Ergebnisse die belegten Kleiderhaken angeben:  $\Omega_1 = \{12, 13, 21, 23, 31, 13\}$

Oder man kann auch nur schauen, welcher Haken noch frei ist:  $\Omega_2 = \{1, 2, 3\}$

Beim zweiten Ergebnisraum ist offensichtlich die Reihenfolge, in der die Jacken aufgehängt wurden, unwichtig.

*(auch hier gibt es in der Realität oft Mischformen!)*