Grundbegriffe zu Gleichungen und Ungleichungen

- (Un)Gleichungen bestehen aus zwei durch ein Gleichheitszeichen bzw. Kleiner- oder Größer- oder Kleinergleich- oder Größergleich-Zeichen verbundenen Termen mit mindestens einer Variablen, z. B. $3x^2 + 5 = 4x$; $x = 2$; $x + y = 0$; $4x + 3 > 10$; $-0{,}5a + \sqrt{2}\,m^2 \leq 34{,}07\sqrt{z}$
- (Un)Gleichungen sind je nach Wert der Variablen wahr oder falsch; sie sind also Aussageformen.
- Setzt man für die Variable(n) Werte ein, so ergibt sich eine Aussage. Die Grundmenge $\mathbb{G}$ einer (Un)Gleichung gibt alle Zahlen an, die man überhaupt sinnvoll einsetzen kann; wenn nicht anders vorgegeben, kann man als Grundmenge meistens $\mathbb{R}$ annehmen.
- Die Werte der Variable(n), für welche die Aussage wahr ist, heißen <u>Lösungen</u> der (Un)Gleichung, zusammen bilden sie die <u>Lösungsmenge</u> $\mathbb{L}$. Man sagt, die Lösungen <u>erfüllen</u> die (Un)Gleichung. Gibt es Lösungen, so heißt die (Un)Gleichung <u>lösbar</u>; gibt es nur eine Lösung, so heißt sie <u>eindeutig lösbar</u>; ist sie für jede Zahl der Grundmenge erfüllt, so heißt sie <u>allgemeingültig</u>.
- Zwei Gleichungen mit derselben Lösungsmenge heißen <u>äquivalent</u> zueinander; man schreibt zwischen die Gleichungen den bekannten Äquivalenzpfeil $\Longleftrightarrow$.
- Eine Gleichung, die man in die Form

  Polynom n-ten Grades = 0

  bringen kann, heißt (algebraische) <u>Gleichung n-ten Grades</u>.
  Beispiele:
  1) Gleichung 1.Grades: z. B. $-3x + 5 = 0$ (<u>lineare</u> Gleichung)
  2) Gleichung 2.Grades: z. B. $0{,}5y^2 - 4y + 10 = 0$ (<u>quadratische</u> Gleichung)
  3) Gleichung 3.Grades: z. B. $a^3 - a + 2 = 0$ („kubische" Gleichung)
- Um eine (Un)Gleichung zu lösen, versucht man im Allgemeinen, die Variable auf einer Seite zu „isolieren". Um dies zu erreichen, darf man nur Umformungen der (Un)Gleichung durchführen, bei denen sich die Lösungsmenge nicht ändert, man darf die (Un)Gleichung also immer nur in eine dazu äquivalente umformen. Zu diesen Äquivalenzumformungen gehören u. a.:
  - Terme auf einer oder beiden Seiten einer (Un)Gleichung in äquivalente Terme umformen (mit den Rechengesetzen)
  - auf beiden Seiten einer (Un)Gleichung dieselbe Zahl / Term addieren oder subtrahieren
  - auf beiden Seiten einer Gleichung mit derselben Zahl (ungleich Null!) multiplizieren; Multiplikation mit einem Term, der Null sein kann, ändert die Lösungsmenge!
    z. B. hat die Gleichung $2x - 2 = 0$ nur die Lösungsmenge $\{1\}$; multiplizieren mit x führt auf die Gleichung $(2x - 2) \cdot x = 0$, welche die Lösungsmenge $\{1; 0\}$ hat
  - auf beiden Seiten einer Gleichung durch dieselbe Zahl (ungleich Null!) dividieren; Division durch einen Term, der Null sein kann, ändert die Lösungsmenge!
- Macht man auf beiden Seiten einer (Un)Gleichung dasselbe, so schreibt man einen Strich | dahinter und schreibt dahinter, was man tut. Z. B. bedeutet | +2 hinter einer Gleichung: auf beiden Seiten der Gleichung wird 2 addiert.
  Beispiel: $3x - 2 = -6 \mid +2 \quad \Longleftrightarrow \quad 3x - 2 + 2 = -6 + 2 \quad \Longleftrightarrow \quad 3x = -4$
- Wird eine (Un)Gleichung mit etwas multipliziert oder durch etwas dividiert, so muss man immer beachten, dass jeweils die ganze linke und die ganze rechte Seite multipliziert oder dividiert wird – nicht nur ein Teil davon! Das D-Gesetz muss beachtet werden!
  Beispiel: $3x - 2 = -6 \mid :3 \quad \Longleftrightarrow \quad (3x - 2):3 = -6:3 \quad \Longleftrightarrow \quad x - \frac{2}{3} = -2$
- ***<u>Vorsicht:</u>*** Verwechsle nicht Äquivalenz(-umformungen) von Termen mit Äquivalenz(-umformungen) von Gleichungen! Z. B. ist es bei einer Gleichung eine Äquivalenzumformung, sie mit 2 zu multiplizieren – bei einem Term nicht! Termumformungen sehen immer so aus:

  $$T_1 = T_2 = T_3 = \ldots,$$

  Gleichungsumformungen sehen immer so aus:

  $$\begin{aligned} & T_1 = T_2 \mid \ldots \\ \Longleftrightarrow\ & T_3 = T_4 \mid \ldots \\ \Longleftrightarrow\ & T_5 = T_6 \mid \ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$