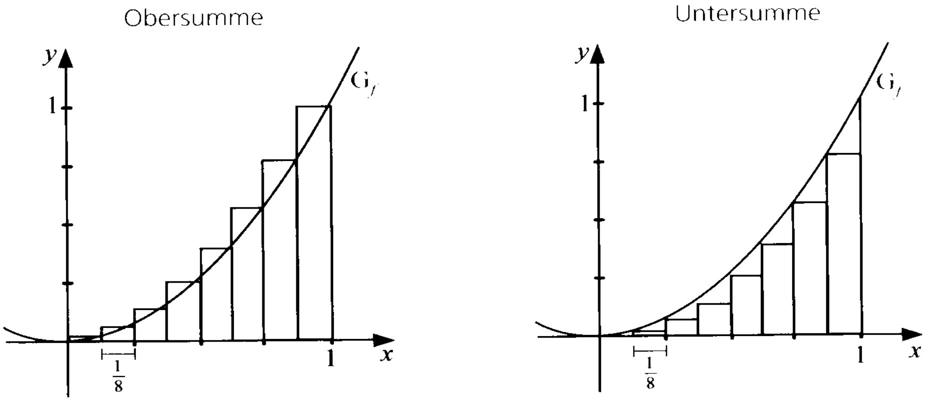
Der Grund für die Integral-Schreibweise

Will man den Flächeninhalt zwischen der x-Achse und dem Graphen einer Funktion berechnen, so kann man ihn durch mehrere Rechtecke annähern. Dabei gibt es mehrere Möglichkeiten: alle Rechtecke können über den Graphen hinaus ragen, oder alle können komplett darunter liegen (oder teils unter, teils über – das wird aber hier nicht berücksichtigt). Dies wird im Folgenden am Beispiel der Fläche zwischen x = 0 und x = 1 unter dem Graphen von $f(x) = x^2$ veranschaulicht:



Man erhält einen Näherungswert für den Inhalt der Fläche unter dem Graphen, indem man die Inhalte der Rechtecksflächen zusammen zählt; deshalb spricht man von einer Ober- bzw. Untersumme. Die Breiten der Rechtecke sind im hier gezeigten Beispiel jeweils 1/8; allgemein schreibt man für die Breiten kurz Δx. Die Höhe eines Rechtecks ergibt sich jeweils als Funktionswert am rechten Rand (Obersumme) bzw. linken Rand (Untersumme). Bezeichnet man die Ränder kurz mit x_i und die Anzahl der Rechtecke mit n, so gilt also für den Flächeninhalt:

$$A = f(x_1) \cdot \Delta x + f(x_2) \cdot \Delta x + \ldots + f(x_n) \cdot \Delta x$$

(Mit Hilfe des Summenzeichens kann man das kurz schreiben als: $A = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x$)

Dies ergibt, wie gesagt, nur eine Näherung für den Flächeninhalt: die Obersumme liefert offensichtlich einen zu großen, die Untersumme einen zu kleinen Flächeninhalt. Allerdings kann man sich leicht vorstellen, dass der Näherungswert um so genauer wird, je mehr Rechtecke man benutzt. Im Idealfall benutzt man also „unendlich viele" Rechtecke – das heißt, man muss den Grenzwert $n \to \infty$ betrachten! In diesem Grenzwert wird die Rechteckbreite Δx „unendlich klein" – wie schon bei der Differenzialrechnung schreibt man also stattdessen nun das „Differenzial" dx. Um auszudrücken, dass man nun unendlich viele Rechtecke zusammen zählt, schreibt man außerdem statt dem Summenzeichen Σ nun ein großes, langgezogenes S – das Integralzeichen $\int$. Insgesamt also:

$$A = \int f(x) \cdot dx$$

(das Malzeichen lässt man meist weg). Daher kommt also die Integralschreibweise: es soll ausgedrückt werden, dass man über unendlich viele Rechtecksflächen summiert (daher das langgezogene S), die alle unendlich schmal sind, also die „infinitesimale" Breite dx haben, und deren Höhe jeweils f(x) ist. Auch der Name „Integral" bzw. „Integration" wird so verständlich: Das lateinische Wort „integralis" bedeutet „ganz". Integration bedeutet, aus Teilen (den Rechtecksflächen) die ganze Fläche zusammenzusetzen, das Integral ist genau diese ganze Fläche.

geschichtliche Anmerkung:
Die grundsätzliche Idee, eine komplizierte Figur durch einfache anzunähern (wie hier z. B. die Fläche unter der Parabel durch Rechtecke), stammt bereits aus dem Jahre 430 vor Christus: der griechische Philosoph Antiphon wollte den Flächeninhalt eines Kreises berechnen, indem er ihn durch ein Vieleck annäherte. Eudoxos von Knidos wendete diese sogenannte „Exhaustionsmethode“ an, um das Volumen einer Pyramide und eines Kegels zu berechnen; Archimedes berechnete so 260 vor Christus mittels eines 96-Ecks die Abschätzung $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$ *und mit einer Methode ähnlich der oberen den Flächeninhalt unter einer Parabel. Dann geriet die Methode aber weitgehend in Vergessenheit und wurde erst um 1635 vom italienischen Mathematiker Bonaventura Cavalieri in ähnlicher Weise wiederentdeckt („Prinzip von Cavalieri“). Die heutzutage verwendete Rechenmethode und die Schreibweise stammt vom deutschen Universalgelehrten Gottfried Wilhelm Leibniz aus dem Jahre 1675 (Newton hatte schon ca. 1665 ähnliche Ideen, hat diese aber nicht veröffentlicht). Der Begriff „Integral‘‘ wurde dann von den schweizerischen Mathematikern (und Brüdern) Jakob und Johann Bernoulli um 1690 eingeführt.*