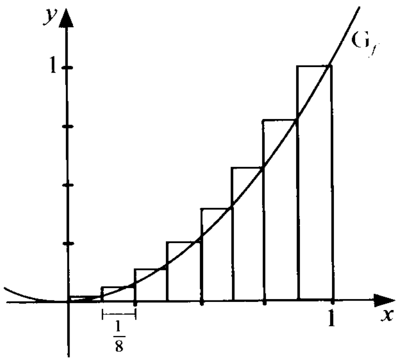
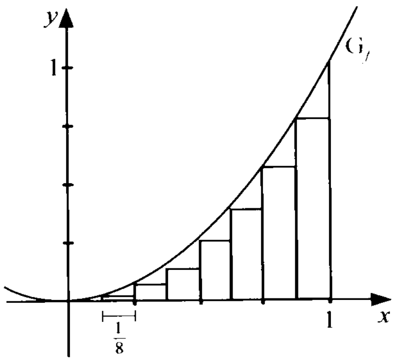
Der Grund für die Integral-Schreibweise

Will man den Flächeninhalt zwischen der x-Achse und dem Graphen einer Funktion berechnen, so kann man ihn durch mehrere Rechtecke annähern. Dabei gibt es mehrere Möglichkeiten: alle Rechtecke können über den Graphen hinaus ragen, oder alle können komplett darunter liegen (oder teils unter, teils über – das wird aber hier nicht berücksichtigt). Dies wird im Folgenden am Beispiel der Fläche zwischen $x = 0$ und $x = 1$ unter dem Graphen von $f(x) = x^2$ veranschaulicht:

Obersumme



Untersumme



Man erhält einen Näherungswert für den Inhalt der Fläche unter dem Graphen, indem man die Inhalte der Rechtecksflächen zusammen zählt; deshalb spricht man von einer Ober- bzw. Untersumme. Die Breiten der Rechtecke sind im hier gezeigten Beispiel jeweils 1/8; allgemein schreibt man für die Breiten kurz Δx. Die Höhe eines Rechtecks ergibt sich jeweils als Funktionswert am rechten Rand (Obersumme) bzw. linken Rand (Untersumme). Bezeichnet man die Ränder kurz mit x_i und die Anzahl der Rechtecke mit n, so gilt also für den Flächeninhalt:

$$A = f(x_1) \cdot \Delta x + f(x_2) \cdot \Delta x + \ldots + f(x_n) \cdot \Delta x$$

(Mit Hilfe des Summenzeichens kann man das kurz schreiben als: $A = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x$)

Dies ergibt, wie gesagt, nur eine Näherung für den Flächeninhalt: die Obersumme liefert offensichtlich einen zu großen, die Untersumme einen zu kleinen Flächeninhalt. Allerdings kann man sich leicht vorstellen, dass der Näherungswert um so genauer wird, je mehr Rechtecke man benutzt. Im Idealfall benutzt man also „unendlich viele“ Rechtecke – das heißt, man muss den Grenzwert $n \to \infty$ betrachten! In diesem Grenzwert wird die Rechteckbreite Δx „unendlich klein“ – wie schon bei der Differenzialrechnung schreibt man also stattdessen nun das „Differenzial“ dx. Um auszudrücken, dass man nun unendlich viele Rechtecke zusammen zählt, schreibt man außerdem statt dem Summenzeichen Σ nun ein großes, langgezogenes S – das Integralzeichen $\int$. Insgesamt also:

$$A = \int f(x) \cdot dx$$

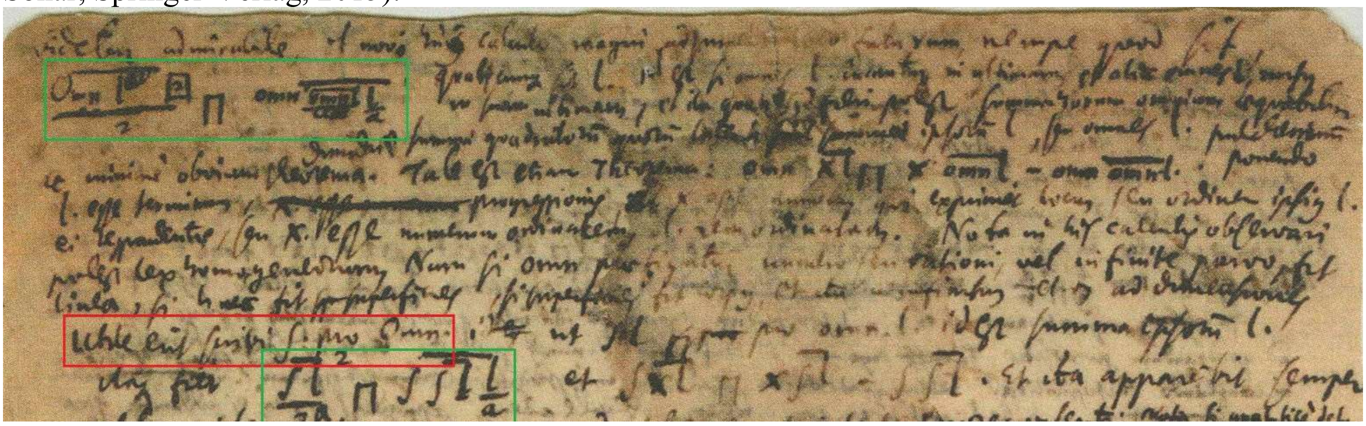
(das Malzeichen lässt man meist weg). Daher kommt also die Integralschreibweise: es soll ausgedrückt werden, dass man über unendlich viele Rechtecksflächen summiert (daher das langgezogene S), die alle unendlich schmal sind, also die „infinitesimale“ Breite dx haben, und deren Höhe jeweils f(x) ist. Auch der Name „Integral‘‘ bzw. „Integration‘‘ wird so verständlich: Das lateinische Wort „integralis‘‘ bedeutet „ganz‘‘. Integration bedeutet, aus Teilen (den Rechtecksflächen) die ganze Fläche zusammenzusetzen, das Integral ist genau diese ganze Fläche.

Historisches:

Die grundsätzliche Idee, eine komplizierte Figur durch einfache anzunähern (wie hier z. B. die Fläche unter der Parabel durch Rechtecke), stammt bereits aus dem Jahre 430 v. Chr.: der griechische Philosoph Antiphon (um 480-411 v. Chr.) wollte den Flächeninhalt eines Kreises berechnen, indem er ihn durch ein Vieleck annäherte. Eudoxos von Knidos (397/390-345/338 v. Chr.) wendete diese sogenannte „Exhaustionsmethode“ an, um das Volumen einer Pyramide und eines Kegels zu berechnen; Archimedes (um 287-212 v. Chr.) berechnete so um 260 v. Chr. unter anderem mittels eines 96-Ecks die Abschätzung $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$ und mithilfe von Dreiecken den Flächeninhalt in einer Parabel. (Wen’s interessiert – hier findet sich eine Darstellung der Rechnung in einer Seminararbeit an einem österreichischen Gymnasium: *http://www.oemg.ac.at/Mathe-Brief/S-Preise-2017/VWA_Schmidhofer.pdf.)*

Dann geriet die Methode aber weitgehend in Vergessenheit; erst einige arabische Mathematiker, vor allem Abu Ali al-Hasan ibn al-Haitham (in Europa bekannt als Alhazen, um 965-1040) nutze sie dann über 1000 Jahre später teilweise wieder. In Europa dauerte es sogar über 1500 Jahre, bis Mathematiker wieder anfingen, sich damit zu beschäftigen, unter anderem der Italiener Francesco Maurolico (1494-1575) und der Flame Simon Stevin (1548-1620), am bekanntesten ist heute noch das „Prinzip von Cavalieri‘‘ (lernt man in manchen Schulen), nach dem italienischen Mathematiker Bonaventura Cavalieri (1598-1647). Eine hübsche kurze Übersicht zur geschichtlichen Entwicklung findet man in diesem Video:
https://www.youtube.com/watch?v=_62EGR-rMgI

Die heutzutage verwendete Rechenmethode und die Schreibweise stammt vom deutschen Universalgelehrten Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) aus dem Jahre 1675 (der Engländer Sir Isaac Newton (1643-1727) hatte schon ca. 1665 ähnliche Ideen, hat diese aber erst Jahrzehnte später veröffentlicht; außerdem war seine Schreibweise weit umständlicher und unverständlicher als die von Leibniz). Im Folgenden ist ein Ausschnitt aus einem Manuskript von Leibniz vom 29.10.1675 gezeigt (entnommen aus dem Buch „Die Geschichte des Prioritätsstreits zwischen Leibniz und Newton‘‘, Thomas Sonar, Springer-Verlag, 2015):



Leibniz schreibt zuerst einige Formeln für Integrale hin (z. B. eingerahmt in grün oben links) und verwendet dabei statt des Integralzeichens noch den Begriff „omn.‘‘ (für lateinisch „omnes‘‘, das Ganze); der Strich über den Termen wurde damals statt Klammern verwendet, das Zeichen $\sqcap$ bedeutet bei Leibniz „gleich‘‘. Dann merkt er an (eingerahmt in rot): „Utile erit scribe $\int$ pro omn. …‘‘, also: „Es wird nützlich sein, $\int$ anstelle von omn. uu schreiben …‘‘, und bringt die Formeln von links oben dann nochmals mit dieser Schreibweise (eingerahmt in grün unten). Das dx taucht hier noch nicht auf (Leibniz schreibt hier l), aber bereits drei Tage später, in einem Manuskript am 1.11.1675, verwendet Leibniz das dann auch erstmals.

Der Begriff „Integral‘‘ wurde allerdings hier noch nicht von Leibniz eingeführt, sondern erst um 1690 von den schweizerischen Mathematikern (und Brüdern) Jakob und Johann Bernoulli. Eine wirklich mathematisch strenge Definition des Integrals wurde erst 1868 durch den deutschen Mathematiker Georg Riemann bzw. etwas vereinfacht, aber äquivalent, 1875 durch den französischen Mathematiker Gaston Darboux gegeben.