Grenzwertsätze

Wie schon bemerkt, erhält man durch das Einsetzen großer Zahlen nur eine *Vermutung* über den Grenzwert; diese Vermutung müsste man eigentlich noch *beweisen*. In manchen Fällen kann man den Grenzwert aber auch ausrechnen. Dazu benutzt man die so genannten Grenzwertsätze.

Betrachten wir einführend die Funktionen

$$f(x) = \frac{x}{x+1} \text{ und } g(x) = \frac{2x}{x-1}$$

und ihre Summe

$$f(x) + g(x) = \frac{x}{x+1} + \frac{2x}{x-1} = \ldots\ldots\ldots = \frac{3x^2 + x}{x^2 - 1}$$

Durch Einsetzen von großen Zahlen erhält man wieder die vermutlichen Grenzwerte:

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 2$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) + g(x)) = 3$

anscheinend gilt hier also: $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) + \lim\limits_{x\to\infty} g(x)$

Dass dies nicht nur hier, sondern sogar immer gilt, kann man allgemein beweisen; ähnliches gilt auch für Differenzen, Produkte und Quotienten von Funktionen:

Sätze: Wenn lim f(x) und lim g(x) existieren, dann gilt

1) $\lim (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) \pm \lim\limits_{x\to\infty} g(x)$

2) $\lim (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to\infty} g(x)$

3) $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$, wenn $\lim g(x) \neq 0$ ist

Anmerkung: Es ist Absicht, dass hier unter den „lim" nichts steht – diese Sätze gelten nicht nur für $x \longrightarrow \infty$, sondern für beliebige Grenzwerte.

Die Bedeutung dieser Sätze liegt darin, dass man nun nach dem Baukasten-Prinzip die Grenzwerte beliebiger Funktionen auf die Grenzwerte von einfachen Funktionen zurück führen und damit dann schließlich berechnen kann.

Beispiele:

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} (2x^3 + 3x^2) \underset{(1)}{=} \lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3 + \lim\limits_{x\to-\infty} 3x^2 \underset{(2)}{=} \lim\limits_{x\to-\infty} 2 \cdot \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 + \lim\limits_{x\to-\infty} 3 \cdot \lim\limits_{x\to-\infty} x^2$

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2 - 1}{x^2 + 1} \underset{(3)}{=} \dfrac{\lim\limits_{x\to\infty} (2x^2 - 1)}{\lim\limits_{x\to\infty} (x^2 + 1)} \underset{(1)}{=} \dfrac{\lim\limits_{x\to\infty} 2x^2 - \lim\limits_{x\to\infty} 1}{\lim\limits_{x\to\infty} x^2 + \lim\limits_{x\to\infty} 1} \underset{(2)}{=} \dfrac{\lim\limits_{x\to\infty} 2 \cdot \lim\limits_{x\to\infty} x^2 - \lim\limits_{x\to\infty} 1}{\lim\limits_{x\to\infty} x^2 + \lim\limits_{x\to\infty} 1}$

Um den Grenzwert beliebiger ganz- und gebrochenrationaler Funktionen auszurechnen, benötigen wir also nur noch die Grenzwerte von konstanten Zahlen und von Potenzfunktionen. Diese kann man sich aber leicht überlegen:

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} 3 = 3$ bzw. allgemein: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} c = c$ für alle $c \in \mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x\to\infty} x = \infty$ ➔ $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 = \lim\limits_{x\to\infty} (x \cdot x) = \lim\limits_{x\to\infty} x \cdot \lim\limits_{x\to\infty} x = \infty \cdot \infty = \infty$
- allgemein: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} cx^n = \pm\infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{R}$
  (je nachdem, ob n gerade oder ungerade ist und je nach VZ von c! siehe Potenzfunktionen!)

- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$ bzw. allgemein: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{c}{x^n} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$, $c \in \mathbb{R}$

Jetzt können wir versuchen, die Grenzwerte in den Beispielen oben auszurechnen. Zunächst haben wir im Beispiel 1:

$$\lim_{x \to -\infty} 2 \cdot \lim_{x \to -\infty} x^3 + \lim_{x \to -\infty} 3 \cdot \lim_{x \to -\infty} x^2 = 2 \cdot (-\infty) + 3 \cdot \infty = -\infty + \infty = ???$$

Die Summe von $-\infty$ und ∞ ist nicht definiert – da kommt nicht etwa 0 heraus, sondern da kann irgend etwas heraus kommen, je nach Rechnung!

Im Beispiel 2 ergibt sich: $\dfrac{\lim\limits_{x \to \infty} 2 \cdot \lim\limits_{x \to \infty} x^2 - \lim\limits_{x \to \infty} 1}{\lim\limits_{x \to \infty} x^2 + \lim\limits_{x \to \infty} 1} = \ldots = \dfrac{\infty}{\infty}$

Der Quotient aus ∞ und ∞ ist aber genauso wenig definiert! Wir stellen also zunächst fest: So geht's nicht...

Das Problem liegt darin, dass beide Summanden bzw. Zähler und Nenner unendlich groß werden. Beim Bruch liegt es nahe, zu versuchen, diese „unendlich“ einfach zu kürzen. Da der höchste Summand sicher in der Rechnung auch immer die größte Zahl ist, liegt es nahe, diesen zu kürzen. Dabei ist aber die alte Regel zu beachten: „In Differenzen und in Summen kürzen nur die ....“ – oder diejenigen, die wissen, wie's richtig geht! Richtig geht es nämlich folgendermaßen: man schreibt Zähler und Nenner zunächst in ein Produkt um (ausklammern!) und kürzt erst dann!

Im Beispiel 2 sieht das so aus:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - 1}{x^2 + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 \cdot \left(2 - \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{2 - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}}$$

Nun, nachdem der störende Faktor x^2 heraus gekürzt wurde, kann man wieder die Grenzwertsätze anwenden: $= \dfrac{\lim\limits_{x \to \infty} 2 - \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x \to \infty} 1 + \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^2}}$

und diese einfachen Grenzwerte dann direkt berechnen: $= \dfrac{2 - 0}{1 + 0}$; das Ergebnis ist also einfach 2.

In Beispiel 1 funktioniert es genauso:

$$\lim_{x \to -\infty} (2x^3 + 3x^2) = \lim_{x \to -\infty} x^3 \cdot \left(2 + \tfrac{3x^2}{x^3}\right) = \lim_{x \to -\infty} x^3 \cdot \left(2 + \tfrac{3}{x}\right) = \lim_{x \to -\infty} x^3 \cdot \left(\lim_{x \to -\infty} 2 + \lim_{x \to -\infty} \tfrac{3}{x}\right) = -\infty \cdot (2 + 0) = -\infty$$

zusammenfassend geht's also folgendermaßen:

<u>Grenzwertberechnung bei ganz- und gebrochenrationalen Funktionen für $x \longrightarrow \pm\infty$:</u>

1) (In Zähler und Nenner) die jeweils höchste Potenz von x ausklammern (und kürzen).
2) Term mit den Grenzwertsätzen zerlegen.
3) Einzelne Grenzwerte berechnen und zusammenfassen.