Grenzwerte „im Unendlichen“

Bei den Hyperbeln haben wir gesehen, dass für sehr große bzw. sehr kleine Werte von x („ganz links“ bzw. „ganz rechts“) der Graph nicht unbedingt nach oben oder unten gehen muss, sondern sich beispielsweise auch der x-Achse annähern kann.

Als weiteres Beispiel dazu betrachten wir eine Anwendung aus der Optik: Steht ein Gegenstand im Abstand x cm vor eine Linse der Brennweite 6 cm, so ist das Bild im Abstand

$$b(x) = \frac{6x}{x-6}$$

cm hinter der Linse. (*Anmerkung:* Eine solche Funktion, die man als Bruch schreiben kann, wobei sowohl im Zähler als auch im Nenner eine ganzrationale Funktion steht (wobei der Nenner nicht konstant ist!), heißt *gebrochenrational*).

Was passiert nun, wenn man den Gegenstand immer weiter entfernt, also x immer größer wird?
Man schreibt dafür $x \longrightarrow \infty$ und sagt „x geht gegen unendlich“.

Versuchen wir eine Wertetabelle (auf drei Nachkommastellen gerundet):

x	10	100	1000	10000
b(x)	15	6,383	6,036	6,004

Anscheinend nähert sich der Bildabstand immer mehr dem Wert cm. Man schreibt dafür $b(x) \longrightarrow 6$ und sagt „b von x geht gegen 6“. Die Zahl 6 heißt der <u>Grenzwert</u> von b(x) für x gegen unendlich; man schreibt

$\lim\limits_{x\to\infty} b(x) = 6$ (sprich: „Limes (*lat. Limes = Grenze*) b von x für x gegen unendlich ist 6“)

allgemein:

Nähern sich die Funktionswerte einer Funktion f immer mehr einem Wert g (<u>Grenzwert</u>) an, wenn x immer größer wird, so schreibt man

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = g \quad \text{oder} \quad f(x) \longrightarrow g \text{ für } x \longrightarrow \infty$$

und sagt, die Funktion f <u>konvergiert</u> gegen g oder f ist <u>konvergent</u> gegen g. Entsprechend ist der Grenzwert für x gegen $-\infty$ definiert.

(anschaulich gesprochen: der Grenzwert ist der Funktionswert für x = ∞, also f(∞))

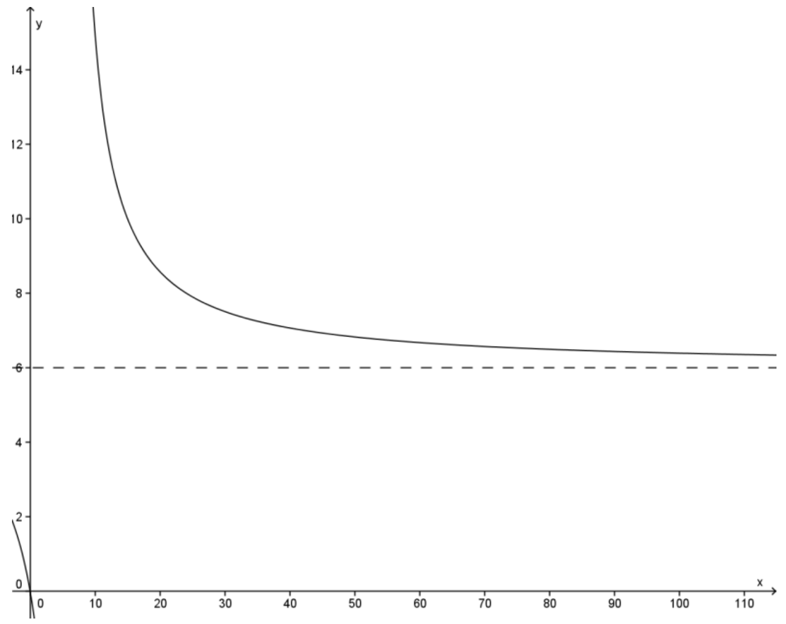
Anmerkungen:

- etwas mathematischer ausgedrückt:
  Man kann den Abstand $|f(x) - g|$ der Funktionswerte zum Grenzwert beliebig klein machen, wenn man nur x genügend groß macht.

- streng mathematische Definition:
  Gibt es für jede reelle Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl (Schranke) x_S, sodass für alle $x > x_S$ gilt, dass
  $$|f(x) - g| < \varepsilon$$
  ist, so heißt g der <u>Grenzwert</u> von f für x gegen unendlich.

- *Beachte:* Setzt man (wie in der Wertetabelle im Beispiel oben) große Zahlen ein, so erhält man nur eine *Vermutung*, was der Grenzwert sein könnte; diese Vermutung müsste man eigentlich noch *beweisen*! (mittels der strengen mathematischen Definition)

- Ist g der Grenzwert einer Funktion f für x gegen unendlich, so nähert sich der Graph „ganz rechts“ der waagrechten Geraden mit der Gleichung y = g (*waagrechte Asymptote*) an; im Beispiel:

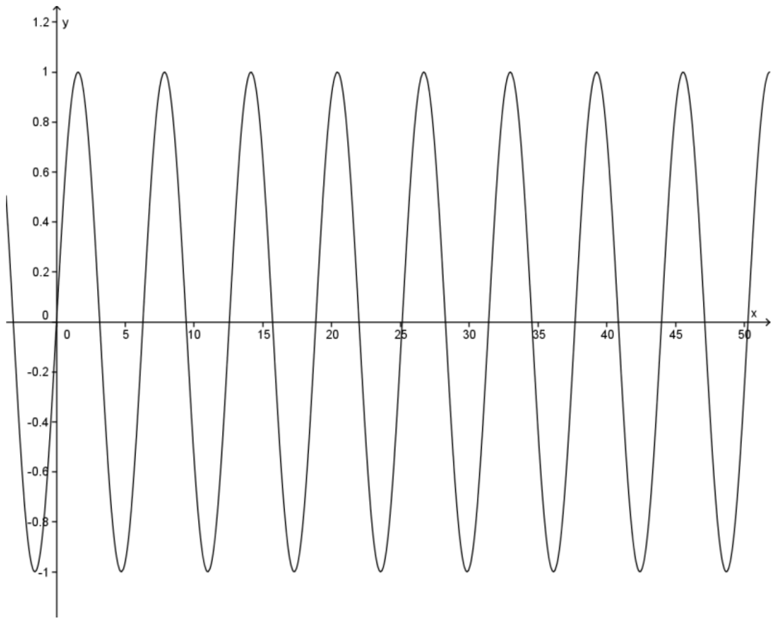


- Gibt es keine reelle Zahl g, gegen die f konvergiert, so heißt f <u>divergent</u>.

Beispiele für Divergenz:

1) f(x) = x
   für $x \longrightarrow \infty$ gilt: $f(x) \longrightarrow \infty$ ➔ kein Grenzwert existiert; oft schreibt man dann aber trotzdem
   $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ („uneigentlicher Grenzwert")
   Man spricht hier von „bestimmter Divergenz“. Diese tritt bei allen ganzrationalen Funktionen auf!

2) f(x) = sin x



   für $x \longrightarrow \infty$ gilt: f(x) schwankt zwischen –1 und +1 hin und her, nähert sich aber keiner Zahl an ➔ kein Grenzwert existiert. Man spricht hier von „unbestimmter Divergenz“.