Grenzwerte an einer Stelle

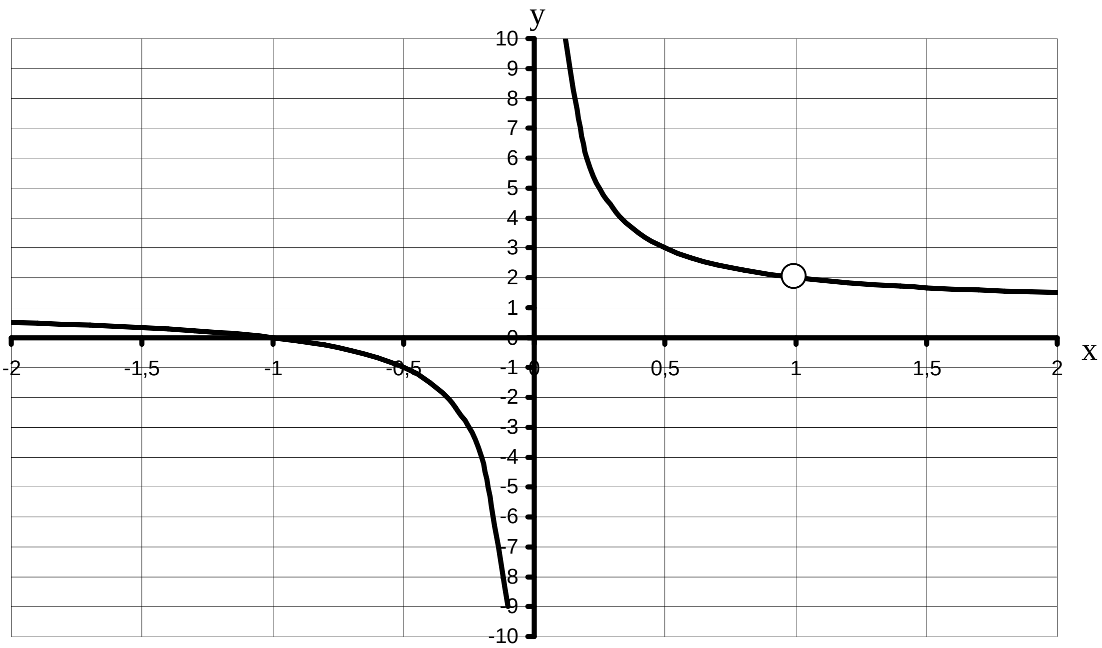
Ganz kurze Zusammenfassung: Der Grenzwert einer Funktion f(x) an der Stelle x_0 gibt an, was mit den Funktionswerten passiert, wenn man „immer näher" an x_0 ran geht. Im Folgenden etwas ausführlicher...

Viele Funktionen sind nicht auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, sondern für einige reelle Zahlen eben nicht definiert. Diese Zahlen nennt man Definitionslücken.

Beispiel:

$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - x}$ hat die Definitionsmenge $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$, weil die Funktionswerte für x = 0 und x = 1 nicht definiert sind: $f(0) = \frac{0^2 - 1}{0^2 - 0} = \frac{-1}{0}$; $f(1) = \frac{1^2 - 1}{1^2 - 1} = \frac{0}{0}$. Die Zahlen 0 und 1 sind hier also Definitionslücken.

Der Graph dazu sieht folgendermaßen aus:



Der kleine Kreis bei x = 1 deutet an, dass die Funktion an dieser Stelle nicht definiert ist. Allerdings sieht es so aus, als ob die Funktion an dieser Stelle eigentlich den Funktionswert 2 haben sollte: wenn man von links oder rechts kommt und sich immer mehr der Stelle x = 1 nähert, so nähern sich die Funktionswerte (y-Werte) immer mehr dem Wert 2 an. Das kann man für einige Werte auch ausrechnen:

f(1,1) = 1,9090...
f(1,01) = 1,9900...
f(0,9) = 2,1111...
f(0,99) = 2,0101...

Man sagt deswegen, die Funktion hat an der Stelle x = 1 den Grenzwert 2, kurz:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2,$$

sprich: „Limes f von x für x gegen 1 ist gleich 2". Die Funktion ist an dieser Stelle dann konvergent bzw. sie konvergiert gegen 2.

Beachte: nicht für jede Definitionslücke gibt es einen Grenzwert! Zwingende Voraussetzung bei Funktionen wie oben ist (das genügt aber noch nicht!), dass sich beim Einsetzen der Stelle in die Funktion $\frac{0}{0}$ ergibt! (das hatten wir oben ja an der Stelle x = 1).

Gibt es an einer Stelle einen Grenzwert, so nennt man die Definitionslücke *(be)hebbar*.

Gibt es dagegen keinen Grenzwert, so nennt man die Stelle eine *Unendlichkeits*- oder *Polstelle*. Das sieht man im Schaubild daran, dass der Graph nach oben oder unten verschwindet. Die Funktionswerte werden also bei Annäherung an die Stelle (im Beispiel oben x = 0) immer größer oder immer kleiner, statt sich immer mehr einem bestimmten Wert zu nähern. Setzt man die Stelle in die Funktion ein, so ergibt sich $\frac{const.}{0}$ mit einem konstanten Wert ungleich 0 (im Beispiel oben hatten wir $\frac{1}{0}$ an der Stelle x = 0). Man sagt dann, die Funktion ist an dieser Stelle <u>divergent</u> bzw. sie <u>divergiert</u>.

Anmerkungen:

- *ein wenig mathematischer* ausgedrückt: Eine Zahl g heißt Grenzwert einer Funktion f an einer Stelle x_0, wenn der Abstand $|f(x) - g|$ beliebig klein wird, wenn man mit x nahe genug an x_0 heran geht, sprich: wenn der Abstand $|x - x_0|$ klein genug gewählt wird.
- *streng mathematische Definition:* Eine Zahl g heißt Grenzwert einer Funktion f an einer Stelle x_0, wenn man für jede Zahl $\varepsilon > 0$ eine (im Allgemeinen von ε abhängige!) Zahl $\delta > 0$ finden kann, so dass für alle x mit $|x - x_0| < \delta$ gilt, dass $|f(x) - g| < \varepsilon$ ist.

Zurück zum Beispiel. Oben hatten wir vermutet, dass

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-x}=2$$

gilt. Das müssten wir aber eigentlich noch mathematisch beweisen – mit der Definition von oben... Aber so ein Beweis ist eine ellenlange Rechnerei, die man sich normalerweise nicht antun will (und die hier nicht vorgeführt wird – muss man nicht wissen und würde nur verwirren). Statt dessen verwendet man wieder die bereits bekannten Grenzwertsätze.

Den Grenzwert $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-x}$ kann man dann relativ einfach berechnen. Zunächst benutzt man im Zähler die dritte binomische Formel und klammert im Nenner x aus:

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{x(x-1)}$$

Jetzt kürzt man mit (x – 1): $=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x}$

Jetzt kann man Satz 3 (für Quotienten) ausnutzen: $=\frac{\lim_{x\to 1}(x+1)}{\lim_{x\to 1}x}$

Und schließlich Satz 1: $=\frac{\lim_{x\to 1}x+\lim_{x\to 1}1}{\lim_{x\to 1}x}$

Weil aber offensichtlich $\lim_{x\to 1}x=1$ und $\lim_{x\to 1}1=1$ ist, ergibt sich schließlich als Ergebnis tatsächlich:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-x}=2.$$

Dasselbe erhält man natürlich, wenn man bei

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x}$$

einfach direkt für x in den Term 1 einsetzt. Die Grenzwertsätze kann man sich also normalerweise sogar sparen!

Schlussendlich haben wir also:

<u>Grenzwertberechnung bei gebrochenrationalen Funktionen für $x \longrightarrow x_0$:</u>

1. Forme den Funktionsterm so um, dass man den Faktor $(x - x_0)$ heraus kürzen kann (im Beispiel oben: $(x - 1)$ wurde heraus gekürzt). Das erreicht man durch Faktorisieren der Terme im Zähler und Nenner, z. B. durch Ausklammern oder Anwenden von binomischen Formeln. Auch Polynomdivision kann zum Ziel führen.
2. Setze im gekürzten Term einfach den Wert x_0 ein.

Bei ganzrationalen Funktionen geht's noch einfacher: da kann man einfach gleich x_0 einsetzen!

Noch ein Beispiel nach diesem Verfahren:

$$\lim_{x\to 3} \frac{2x^2 - 12x + 18}{3 - x}$$

Im Zähler kann man 2 ausklammern und dann die zweite binomische Formel anwenden, im Nenner kann man –1 ausklammern:

$$= \lim_{x\to 3} \frac{2(x-3)^2}{-1\cdot(x-3)}$$

Jetzt kann man den problematischen Faktor $(x - 3)$ kürzen:

$$= \lim_{x\to 3} \frac{2(x-3)}{-1}$$

Und nun, wo der problematische Faktor weg ist, kann man einfach $x = 3$ einsetzen:

$$= \frac{2\cdot(3-3)}{-1} = 0.$$

Der Grenzwert ist also 0.

Stattdessen hätte man auch die Polynomdivision ausführen können:

$$(2x^2 - 12x + 18) : (-x + 3) = -2x + 6$$

Damit ergibt sich ebenso:

$$\lim_{x\to 3} \frac{2x^2 - 12x + 18}{3 - x} = \lim_{x\to 3}(-2x + 6) = -2\cdot 3 + 6 = 0.$$

Noch einfacher geht die Rechnung oft, wenn man x durch $x_0 + h$ ersetzt und dann den Limes $h \rightarrow 0$ berechnet (ist dann natürlich dasselbe wie $x \rightarrow x_0$!). Man muss den Term dann nur so umformen, dass man h heraus kürzen kann (sprich: nur im Zähler h ausklammern), und kann danach direkt $h = 0$ einsetzen. Beispiel:

$$\lim_{x\to 2} \frac{4 - x^2}{x - 2} = \lim_{h\to 0} \frac{4 - (2+h)^2}{2 + h - 2} = \lim_{h\to 0} \frac{4 - \left(4 + 4h + h^2\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-4h - h^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h\cdot(-4-h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(-4 - h\right) = -4$$

Der Grenzwert ist also –4.