Beweis:

Die Folge bei der stetigen Verzinsung nähert sich einem Grenzwert an

Behauptung 1: Je größer n wird, desto größer wird auch $\boldsymbol{a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$.

Beweis:

Wir betrachten den Quotienten von a_n und der Zahl direkt davor, also $a_{n-1} = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}$$

In beiden Klammern kann man jeweils zunächst die 1 auf den jeweiligen Hauptnenner erweitern und dann jeweils die beiden Brüche addieren, das ergibt

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}}.$$

Mit einem Potenzgesetz kann man den Nenner umschreiben:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n \left(\frac{n}{n-1}\right)^{-1}}.$$

und dann ausnutzen, dass ,,hoch -1“ dasselbe bedeutet wie ,,1 durch“, und außerdem, dass ,,1 durch einen Bruch“ dasselbe ist wie mal den Kehrbruch; damit folgt

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{n}{n-1}}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n}.$$

Die beiden Klammern mit jeweils ,,hoch n“ kann man nun mittels eines Potenzgesetzes zusammenfassen,

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \left(\frac{n+1}{n} \Big/ \frac{n}{n-1}\right)^n \frac{n}{n-1},$$

und mittels Bruchrechnung und der dritten binomischen Formel vereinfacht sich das dann zu

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \frac{n}{n-1} \;(*).$$

Nun schauen wir uns die potenzierte Klammer genauer an. Wir haben n-mal denselben Faktor,

$$\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n = \frac{n^2-1}{n^2} \cdot \frac{n^2-1}{n^2} \cdot \ldots \cdot \frac{n^2-1}{n^2}$$

Dieses Produkt können wir nun abschätzen. Dafür nutzen wir aus, dass ein Bruch $\frac{a}{b}$ (mit $1 \leq a < b$) kleiner wird, wenn man Zähler a und Nenner b jeweils um 1 kleiner macht, $\frac{a}{b} > \frac{a-1}{b-1}$ (z. B. ist $\frac{2}{3} > \frac{1}{2}$ und $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$; das wird weiter unten aber auch noch allgemein bewiesen). Damit ist $\frac{n^2-1}{n^2} > \frac{n^2-2}{n^2-1} > \frac{n^2-3}{n^2-2}$ usw., und deshalb folgt

$$\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n > \frac{n^2-1}{n^2} \cdot \frac{n^2-2}{n^2-1} \cdot \frac{n^2-3}{n^2-2} \cdot \ldots \cdot \frac{n^2-n}{n^2-(n-1)}$$

(Da wir insgesamt ja n Faktoren haben und in jedem Nenner jeweils 1 abgezogen wird, folgt, dass der letzte Faktor im Zähler nun $n^2 - n$ stehen haben muss.) Man sieht nun, dass sich jeweils ein Zähler mit dem Nenner des folgenden Bruches weg kürzt ($n^2 - 1$vom Zähler des ersten Bruchs kürzt sich mit $n^2 - 1$ vom Nenner des zweiten; $n^2 - 2$ vom Zähler des zweiten Bruchs kürzt sich mit $n^2 - 2$ vom Nenner des dritten; usw. $n^2 - (n-1)$ vom Zähler des vorletzten Bruchs kürzt sich schließlich mit $n^2 - (n-1)$ vom Nenner des letzten). Deshalb bleibt am Schluss nur das n^2 vom Nenner des ersten Bruchs und eben das $n^2 - n$ vom Zähler des letzten Bruches übrig,

$$\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n > \frac{n^2-n}{n^2}$$

(Anmerkung: Diese Abschätzung habe ich bisher nirgends gesehen, habe ich mir selbst ausgedacht; normalerweise wird für die Abschätzung die ,,Bernoulli'sche Ungleichung" verwendet, deren Beweis aber deutlich über Schulstoff hinaus geht.)

Setzen wir das oben in (*) ein, so folgt

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} > \frac{n^2-n}{n^2}\frac{n}{n-1},$$

und da $n^2 - n$ zu $n(n-1)$ faktorisiert werden kann, kürzt sich nun alles weg, und es bleibt nur übrig:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} > 1,$$

also letztlich $a_n > a_{n-1}$. Damit ist der Beweis fertig: Wir haben gezeigt, dass a_n immer größer wird, wenn man n größer macht (wenn man der Reihe nach für das n Zahlen einsetzt, hat man z. B. $a_6 > a_5 > a_4 > a_3 > a_2 > a_!$).

Es fehlt noch der Beweis für die oben behauptete Ungleichung zwischen Brüchen. Vorausgesetzt war dort ja $a < b$; daraus folgt sofort $-a > -b$ und daraus wiederum $ab - a > ab - b$. Jetzt kann man beide Seiten faktorisieren, $a(b-1) > b(a-1)$. Da außerdem b größer als 1 sein soll, sind$(b-1)$ und b hier positiv, man kann also problemlos durch diese beiden Faktoren teilen – und damit folgt die behauptete Ungleichung $\frac{a}{b} > \frac{a-1}{b-1}$.

Behauptung 2: Für alle natürlichen Zahlen n ist $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

Das sollte eigentlich schon anschaulich klar sein: Die Terme b_n beschreiben, wie viel man erhält, wenn nicht nur jeweils nach dem Zeitraum $\frac{1}{n}$ jeweils verzinst wird, sondern noch einmal zusätzlich (z. B. zu Beginn der Kapitelanlage). Das kann man aber auch schnell rechnerisch zeigen:

$$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot 1 = a_n,$$

also hat man sofort $b_n > a_n$.

Setzt man nun konkrete Zahlen ein, so ergibt sich $b_1 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^{1+1} = 2^2 = 4$, $b_2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^{2+1} = 1{,}5^3 = 3{,}375$,

$b_3 = \left(1+\frac{1}{3}\right)^{3+1} = \left(\frac{4}{3}\right)^4 \approx 3{,}16$ usw. Die Zahlenfolge b_n nimmt also anscheinend immer mehr ab.

Behauptung 3: Je größer n wird, desto kleiner wird auch $\boldsymbol{b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}$.

Der Beweis läuft ziemlich ähnlich wie die von Behauptung 1:

Wir betrachten den Quotienten von b_n und der Zahl direkt davor, also $b_{n-1} = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n$:

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n+1}{n}\right)}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n} = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \frac{n+1}{n}$$

$$= \frac{n^2-1}{n^2} \cdot \frac{n^2-1}{n^2} \cdot \ldots \frac{n^2-1}{n^2} \cdot \frac{n+1}{n}.$$

Diesmal nutzen wir aus, dass ein Bruch $\frac{a}{b}$ (mit $1 \leq a < b$) größer wird, wenn man Zähler a und Nenner b jeweils um 1 größer macht; also ist

$$\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n < \frac{n^2-1}{n^2} \cdot \frac{n^2}{n^2+1} \cdot \frac{n^2+1}{n^2+2} \cdot \ldots \cdot \frac{n^2+n-2}{n^2+(n-1)};$$

nach Kürzen bleibt übrig

$$\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n < \frac{n^2-1}{n^2+n-1}.$$

Damit folgt

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} < \frac{n^2-1}{n^2+n-1} \frac{n+1}{n} = \frac{n^3+n^2-n-1}{n^3+n^2-n},$$

und da der Zähler offensichtlich kleiner als der Nenner ist, folgt, dass der letzte Bruch nun < 1 ist - letztlich folgt also $b_n < b_{n-1}$, und damit ist der Beweis fertig.

Aus $b_n < b_{n-1}$ folgt aber sofort $b_{n-1} < b_{n-2}$, $b_{n-2} < b_{n-3}$ usw. und, wenn man alle diese Ungleichungen zusammennimmt, letztlich $b_n < b_1 = 4$. (Auch das sollte anschaulich klar sein: Da die Zahlen b_n immer mehr abnehmen, müssen alle diese Zahlen kleiner sein als die erste dieser Zahlen, also eben kleiner als $b_1 = 4$.) Zusammen mit Behauptung 2 folgt dann auch sofort, dass $a_n < 4$ sein muss für alle natürlichen Zahlen n. (Mit den berechneten Werten für b_2 und b_3 oben folgt sogar, dass $a_n < 3{,}375$ und $a_n < \left(\frac{4}{3}\right)^4 \approx 3{,}16$ gelten muss.)

Insgesamt haben wir also gezeigt, dass die Zahlen $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ immer größer werden, aber nie größer als 4 werden können. Damit sollte anschaulich klar sein, dass sich diese Zahlen an einen Grenzwert annähern müssen (der sicher nicht größer als 4 sein kann). Diesen Grenzwert kann man aber leider nicht exakt angeben, sondern nur näherungsweise – denn er ist eine irrationale Zahl, die man eben die ,,Euler’sche Zahl“ e nennt.

Und wo wir schon dabei sind… **Behauptung 4: Die Euler'sche Zahl ist irrational.**

Um das zu zeigen, müssen wir die Klammern zunächst ausmultiplizieren,

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

wobei insgesamt n Faktoren auftreten. Das sieht erst mal ziemlich hoffnungslos aus (man muss ja jeden Summanden in jeder Klammer mit jedem Summanden in jeder anderen Klammer multiplizieren!) – aber man kann sich halbwegs einfach überlegen, wie die Summanden der entstehenden Summe aussehen müssen. Zunächst können wir aus jeder Klammer jeweils die 1 nehmen und diese ganzen Einsen multiplizieren; das ergibt natürlich 1. Als nächstes können wir aus einer der n Klammern das $\frac{1}{n}$ nehmen und aus allen anderen Klammern jeweils die 1; dafür gibt es n Möglichkeiten, deshalb erhalten wir einen Summanden $n\cdot\frac{1}{n}$. Weiter: Wir können aus zwei der Klammern jeweils das $\frac{1}{n}$ nehmen und aus allen anderen Klammern jeweils die 1. Für die Wahl der ersten Klammer gibt es n Möglichkeiten, für die Wahl der zweiten Klammer dann noch n-1 Möglichkeiten; man könnte also vermuten, dass es dafür insgesamt n(n-1) Möglichkeiten geben würde. Dabei würde man aber alle Möglichkeiten doppelt zählen (denn es ist ja z. B. dasselbe, ob man das erste $\frac{1}{n}$ aus der ersten Klammer nimmt und das zweite $\frac{1}{n}$ aus der zweiten Klammer, oder das erste $\frac{1}{n}$ aus der zweiten Klammer nimmt und das zweite $\frac{1}{n}$ aus der ersten Klammer); deshalb sind es nur $\frac{n(n-1)}{2}$ Möglichkeiten, und damit erhalten wir einen Summanden $\frac{n(n-1)}{2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2$. Eine ähnliche Überlegung ergibt: Wenn wir aus drei Klammern jeweils das $\frac{1}{n}$ nehmen und aus den restlichen Klammern jeweils die 1, so haben wir n(n-1)(n-2) Möglichkeiten, davon sind aber jeweils 6 = 2 · 3 Möglichkeiten jeweils dasselbe (wenn wir nur die Nummern der Klammern hinschreiben, dann ist z. B. 123, 132, 231, 213, 312 und 321 alles jeweils dasselbe), also ergibt sich ein Summand $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3$. Allgemein ergibt sich: Für einen Summanden, der k Faktoren $\frac{1}{n}$ enthält, ergeben sich $\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k}$ Möglichkeiten (wer schon etwas Kombinatorik gelernt hat: das ist genau der „Binomialkoeffizient" $\binom{n}{k}$, und der heißt ja deshalb so, weil er eben in binomischen Formeln auftaucht!). Deshalb ist letztlich

$$a_n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k}\left(\frac{1}{n}\right)^k$$
$$+\cdots+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

In jedem Summanden nach dem ersten kann man nun jeweils die Faktoren mit n im Zähler mit den Faktoren n im Nenner kürzen (Vorsicht, Distributivgesetz beachten! z. B. ist $\frac{n-1}{n}$ nicht etwa gleich –1, sondern gleich $1-\frac{1}{n}$!),

$$a_n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)}{1\cdot 2} + \frac{1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots + \frac{1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k}$$
$$+\cdots+\frac{1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\frac{1}{n}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n} \quad (**)$$

Letztlich sind wir ja aber am Grenzwert $n\to\infty$ interessiert. Dafür folgt aber einfach

$$1-\frac{1}{n}\to 1-0=1;\quad 1-\frac{2}{n}\to 1-0=1;\quad \ldots\cdot 1-\frac{k-1}{n}\to 1-0=1,$$

die Zähler aller Brüche gehen also nun einfache gegen 1. Dazu kommt noch, dass die Summe nun unendlich viele Summanden hat. Wir haben also folgende Darstellung für die Euler'sche Zahl gefunden:

$$\boxed{e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k} + \cdots}$$

(Diese Rechnung hat übrigens schon Euler selbst sehr ähnlich durchgeführt.)

Daraus kann man dann auch deutlich einfacher Abschätzungen für e erhalten als aus der ursprünglichen Definition, z. B. ergibt die Summe bis $n = 6$:

$$e < 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 4} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 5} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 6} \approx 2{,}718;$$

das ist erstens leichter zu berechnen als $\left(1+\frac{1}{6}\right)^6 \approx 2{,}522$ und zweitens auch deutlich dichter dran am eigentlichen Wert von e.

Nun endlich zum eigentlichen Beweis, dass e eine irrationale Zahl ist. Wir stellen dafür erst mal die Vermutung auf, dass man die Euler'sche Zahl als einen Bruch schreiben kann, $e = \frac{p}{q}$ mit natürlichen Zahlen $p, q \geq 1$, und zeigen dann, dass diese Vermutung auf einen Widerspruch führt. Dafür teilen wir die Summe zunächst auf in den Teil, der bis $\frac{1}{q!}$ geht und die (unendlich vielen) Summanden dahinter,

$$e = \frac{p}{q} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot q} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot q\cdot (q+1)} + \cdots$$

und bringen die vorderen Summanden bis $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot q}$ auf die linke Seite,

$$\frac{p}{q} - 1 - \frac{1}{1} - \frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} - \cdots - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot q} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot q\cdot (q+1)} + \cdots$$

Dann multiplizieren wir mit $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot q$,

$$\frac{p\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot q}{q} - \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot q}{1} - \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot q}{1} - \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot q}{1\cdot 2} - \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot q}{1\cdot 2\cdot 3} - \cdots - \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot q}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot q}$$
$$= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot q}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot q\cdot (q+1)} + \cdots$$

und kürzen anschließend (auf der rechten Seite schreiben wir jetzt noch ein paar Summanden mehr hin),

$$p\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (q-1) - 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot q - 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot q - 3\cdot \ldots \cdot q - 4\cdot \ldots \cdot q - \cdots - 1$$
$$= \frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} + \cdots$$

Auf der linken Seite steht nun eine Summe von lauter ganzen Zahlen, also ist die komplette linke Seite eine ganze Zahl – also muss auch die unendliche Summe auf der rechten Seite eine ganze Zahl ergeben. Schauen wir uns die Summanden in dieser unendlichen Summe nun noch genauer an. Wegen $q \geq 1$ ist $q+1 \geq 2,\ q+2 > 2,\ q+3 > 2$ usw. und deshalb $\frac{1}{(q+1)} \leq \frac{1}{2},\ \frac{1}{(q+1)(q+2)} < \frac{1}{2\cdot 2} = \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} < \frac{1}{2\cdot 2\cdot 2} = \frac{1}{2^3}$, das heißt für die unendliche Summe der rechten Seite gilt die Abschätzung

$$\frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} + \cdots < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots$$

Ganz ähnlich wie in Behauptung 2 kann man sich nun überlegen, dass diese neue unendliche Summe mit lauten Potenzen von ½ sicher nie größer als 1 werden kann. (Oder man begründet es graphisch: Man male sich ein Quadrat hin mit Seitenlänge 1, also Flächeninhalt 1; der erste Summand ist die Hälfte der Quadratfläche, der zweite Summand ein weiteres Viertel der Quadratfläche, der dritte Summand ein weiteres Achtel der Quadratfläche usw.; offensichtlich kann man, wenn man alle diese Flächen aufsummiert, nie mehr als die komplette Quadratfläche erhalten.) Für die rechte Seite gilt also:

$$\frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} + \cdots < 1.$$

Andererseits summiert man hier ja lauter positive Zahlen, also ist die rechte Seite sicher auch größer als 0. Insgesamt folgt, dass die unendliche Summe auf der rechten Seite eine Zahl zwischen 0 und 1 ergeben muss. Weiter oben hatten wir allerdings begründet, dass die unendliche Summe auf der rechten Seite eine *ganze* Zahl ergeben muss! Offensichtlich gibt es aber zwischen 0 und 1 keine ganze Zahl. Damit haben wir einen Widerspruch gefunden, und deshalb muss unsere ursprüngliche Vermutung (eben, dass man die Euler'sche Zahl als einen Bruch schreiben kann) falsch sein. Und damit ist bewiesen, dass die Euler'sche Zahl irrational ist.

(Anmerkung: Wer diesen Beweis erstmals so durchführte, ist mir nicht bekannt, er ist aber Standard und in sehr vielen Büchern, Webseiten, Videos etc. zu finden. Euler selbst hat die Irrationalität auf eine völlig andere Weise bewiesen, mittels sogenannter „Kettenbrüche“, die leider kein Schulstoff sind.)