<u>Beispiel für den Beweis einer Grenzwert-Vermutung</u>

Bei der Funktion f(x) = $\frac{6x}{x-6}$ erhält man durch Einsetzen „großer" Zahlen die ***Vermutung***, dass der Grenzwert für x gegen unendlich wohl 6 ist. Diese Vermutung soll nun ***bewiesen*** werden.

Zu zeigen ist:

Für jeden vorgegebenen Abstand ε > 0 kann man eine Schranke x_s finden, sodass für alle x-Werte mit x > x_s gilt, dass der Abstand |f(x) – 6| der Funktionswerte zum Grenzwert 6 kleiner ist als ε, also:

$$\left|\frac{6x}{x-6}-6\right|<\varepsilon$$

Diese Schranke x_s findet man, indem man „einfach" diese Ungleichung nach x auflöst. Also erst mal zwischen den Betragsstrichen die Terme zusammenfassen. Dafür zunächst alles auf einen Bruchstrich bringen, also erst mal die 6 mit (x – 6) erweitern:

$$\left|\frac{6x}{x-6}-\frac{6(x-6)}{x-6}\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{6x-6(x-6)}{x-6}\right|<\varepsilon$$

Klammer auflösen:

$$\left|\frac{6x-6x+36}{x-6}\right|<\varepsilon$$

Und zusammenfassen:

$$\left|\frac{36}{x-6}\right|<\varepsilon$$

Die 36 ist eine positive Zahl, und x – 6 ist sicher auch positiv (wenn x nur groß genug ist und wir wollen ja, dass x gegen unendlich geht!). Also ist der Term zwischen den Betragsstrichen positiv – also können wir uns den Betrag auch sparen:

$$\frac{36}{x-6}<\varepsilon$$

Das x steht im Nenner, muss also erst mal nach oben gebracht werden. Also mit (x – 6) multiplizieren:

$$36 < \varepsilon\,(x-6)$$

$$36 < \varepsilon x - 6\varepsilon \qquad |+6\varepsilon$$

$$6\varepsilon + 36 < \varepsilon x \qquad |:\varepsilon$$

$$x > \frac{6\varepsilon+36}{\varepsilon}$$

Das kann man auch noch anders hinschreiben (muss man aber nicht…):

$$x > 6+\frac{36}{\varepsilon}$$

Nun setzen wir einfach x_s = $6+\frac{36}{\varepsilon}$ und haben

$$x > x_s$$

Das obige waren alles Äquivalenzumformungen; man hätte sie also auch andersherum machen können. Damit haben wir also gezeigt:

Wenn x > x_s ist (wobei x_s = $6+\frac{36}{\varepsilon}$ gilt), dann folgt, dass $\left|\frac{6x}{x-6}-6\right|<\varepsilon$ ist.

Also kann man tatsächlich zu jedem vorgegebenen ε > 0 eine Schranke x_s finden (nämlich $6+\frac{36}{\varepsilon}$), sodass für alle x-Werte mit x > x_s gilt, dass der Abstand |f(x) – 6| der Funktionswerte zum Grenzwert 6 kleiner ist als ε.

q.e.d.