

Goniometrische Gleichungen

Goniometrische (auch: trigonometrische) Gleichungen sind solche, bei denen die gesuchte Variable im Argument von einer oder mehreren trigonometrischen Funktion(en) vorkommt. Es gibt kein allgemeines Patentrezept zum Lösen solcher Gleichungen (jede ist letztlich anders), dennoch ist es sicher praktisch, wenn man die unten gezeigten oft vorkommenden Spezialfälle beherrscht.

Generell beachten: In der Analysis den Taschenrechner auf RAD stellen, in der Geometrie auf DEG!

1) Nur eine Funktion, im Argument nur die Variable. (Eine Skizze kann hier hilfreich sein!)

Beispiel:

$$2 \sin(x) = -1,5$$

- erst mal den Sinus isolieren: $\sin(x) = -0,75$
- dann, um den Sinus loszuwerden, \sin^{-1} anwenden (Taschenrechner: Shift sin; mathematisch korrekte Bezeichnung: Arkussinus, arcsin): $x_1 \approx -0,848$
- eine zweite Lösung erhält man aus der Symmetrie: $x_2 = \pi - x_1 \approx 3,990$
(bei cos ist die zweite Lösung $x_2 = -x_1$; bei tan gibt es pro Periode nur eine Lösung)
- alle anderen Lösungen erhält man aus der Periodizität:

$$x_{1k} = -0,848 + 2\pi k \quad \text{und} \quad x_{2k} = 3,990 + 2\pi k \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}$$

(bei cos ist die Periode auch 2π , bei tan nur π)

Das k anzugeben ist **wichtig**, wenn alle Lösungen verlangt sind! Sind nur die Lösungen in einem bestimmten Intervall verlangt, sucht man sich (anschließend, oder direkt) die passenden heraus.

2) Nur eine Funktion, im Argument eine lineare Funktion der Variable.

Beispiel:

$$325 \cos(100\pi t + 3\pi) = 100$$

- erst mal den Kosinus isolieren: $\cos(100\pi t + 3\pi) = \frac{100}{325} = \frac{4}{13}$
- Nun empfiehlt sich eine Substitution (muss man nicht machen, hält die Rechnung aber übersichtlicher!); man setzt das Argument gleich u, hier also $u = 100\pi t + 3\pi$:

$$\cos(u) = \frac{4}{13}$$

- weiter wie in Punkt 1; erst mal \cos^{-1} : $u_1 \approx 1,258$
- mit Symmetrie: $u_2 \approx -1,258$
- dann Rücksubstituieren (oder erst am Schluss, ist Geschmackssache):

$$100\pi t + 3\pi = 1,258 \rightarrow t_1 = -0,0256$$

$$100\pi t + 3\pi = -1,258 \rightarrow t_2 = -0,0340$$

- Periodizität (Vorsicht! Die Periode ist allgemein nun $2\pi/|b|$, hier also $0,02!$):

$$t_{1k} = -0,0256 + 0,02k \quad \text{und} \quad t_{2k} = -0,0340 + 0,02k \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}$$

oder: $u_{1k} = 1,258 + 2\pi k$ und $u_{2k} = -1,258 + 2\pi k$ (bei u ist $b = 1$, also Periode 2π), dann Rücksubstituieren...

Im Folgenden werden komplexere Gleichungen mit mehreren Funktionen betrachtet. Dabei wird immer nur angegeben, wie man auf eine Lösung kommt, die anderen (unendlich vielen) sollten klar sein.

3) Zunächst sollte man **immer** schauen (das gilt eigentlich für jede Art von Gleichung!), ob man den Satz vom Nullprodukt ausnutzen kann: Hat man ein Produkt, das Null ergeben soll? Dann jeden Faktor einzeln betrachten! Falls nicht: Versuchen, gemeinsame Faktoren auszuklammern!

Beispiel:

$$\cos^2(x) \sin(x) = 2 \sin^2(x) \cos(x)$$

- alles auf eine Seite: $\cos^2(x) \sin(x) - 2 \sin^2(x) \cos(x) = 0$
- gemeinsame Faktoren ausklammern:

$$\cos(x) \sin(x) (\cos(x) - 2 \sin(x)) = 0$$

- es bleiben die drei einzelnen Gleichungen:

$$\cos(x) = 0 \quad \text{und} \quad \sin(x) = 0 \quad \text{und} \quad \cos(x) - 2 \sin(x) = 0$$

Die ersten beiden sind leicht lösbar, zur dritten siehe hinten.

4) Sinus und Kosinus mit demselben Argument, aber keine konstanten Summanden.

Beispiel: $\sin(x) - 2 \cos(x) = 0$

- durch \cos teilen (darf man, weil $\cos(x) = 0$ hier keine Lösung ergeben würde!), und $\tan(x) = \sin(x)/\cos(x)$ ausnutzen:

$$\tan(x) - 2 = 0$$

- Dann weiter wie in (1) bzw. (2).

5) Eine Funktion zum Quadrat, dieselbe Funktion noch mal, außerdem noch ein konstanter Summand.

Beispiel: $\tan^2(x) - 3 \tan(x) + 2 = 0$

- die Funktion substituieren, hier also $u = \tan(x)$:

$$u^2 - 3u + 2 = 0$$

- quadratische Gleichung lösen: $u_1 = 1$; $u_2 = 2$
- Rücksubstituieren: $\tan(x) = 1$ und $\tan(x) = 2$
- Dann weiter wie in (1) bzw. (2).

6) Sinus oder Kosinus zum Quadrat, die jeweils andere Funktion (mit demselben Argument) noch mal einzeln.

Beispiel: $\sin^2(x) - 2 \cos(x) = 0$

- „trigonometrischen Pythagoras“ ($\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$) ausnutzen:

$$1 - \cos^2(x) - 2 \cos(x) = 0$$

- Dann weiter wie in (3) oder (4).

7) Sinus und Kosinus mit demselben Argument, außerdem noch ein konstanter Summand.

Beispiel: $\sin(x) + \cos(x) - 1 = 0$

- Sinus (oder Kosinus) isolieren:

$$\sin(x) = 1 - \cos(x)$$

- quadrieren (binomische Formel beachten!) und trigonometrischen Pythagoras ausnutzen:

$$\begin{aligned} \sin^2(x) &= 1 - 2 \cos(x) + \cos^2(x) \\ 1 - \cos^2(x) &= 1 - 2 \cos(x) + \cos^2(x) \end{aligned}$$

- weiter wie in (5)
- am Schluss: Probe nicht vergessen! (quadrieren ist keine Äquivalenzumformung, das heißt, dadurch können Lösungen dazu kommen, die keine Lösungen der ursprünglichen Gleichung sind)

8) Produkt von Sinus und Kosinus mit demselben Argument und konstanter Summand.

Beispiel: $\sin(x) \cos(x) + 0,5 = 0$

- $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$ rückwärts benutzen: $0,5 \sin(2x) + 0,5 = 0$
- weiter wie in (2)

9) Kosinus zum Quadrat minus Sinus zum Quadrat minus zum selben Argument

Beispiel: $3 \cos^2(x) - 3 \sin^2(x) = 0,6$

- 3 ausklammern, dann $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ rückwärts benutzen: $3 \cos(2x) = 0,6$

- weiter wie in (2)

- alternativ: trigonometrischen Pythagoras benutzen, dann \sin bzw. \cos isolieren, $\pm\sqrt{\quad}$ ziehen

10) Eine Funktion mit dem doppelten, eine mit dem einfachen Argument

Beispiel: $\sin(6x + 2) + \sin(3x + 1) = 0$

- $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$ bzw. $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2 \cos^2(x) - 1$ benutzen; hier:

$$\begin{aligned} \sin(6x + 2) &= \sin(2(3x + 1)) = 2 \sin(3x+1) \cos(3x+1), \text{ also ist die Gleichung} \\ 2 \sin(3x+1) \cos(3x+1) &+ \sin(3x+1) = 0 \end{aligned}$$

- weiter wie in (3) oder (5)