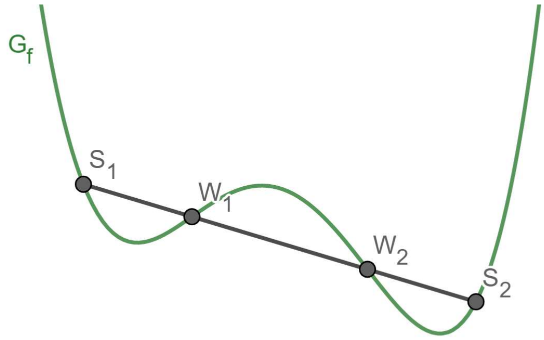
Die Wendepunkte eines Funktionsgraphen 4. Grades teilen die Sekante im Goldenen Schnitt

Behauptung: Wenn der Graph einer Funktion 4. Grades zwei Wendepunkte hat, dann schneidet die Sekante durch diese beiden Punkte den Graphen in zwei weiteren Punkten S_1, S_2, von denen einer links, der andere rechts von beiden Wendepunkten liegt, und jeweils ein Wendepunkt teilt jeweils die Strecke vom anderen Wendepunkt zum Schnittpunkt, der jeweils auf der anderen Seite liegt, im goldenen Schnitt (siehe Abbildung unten).



(Hier gilt: $|\overline{W_1S_2}| = \phi\, |\overline{W_1W_2}|$ und $|\overline{S_1W_2}| = \phi\, |\overline{W_1W_2}|$ mit dem Goldenen Schnitt $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$.)

Beweis: Den Term einer Funktion 4. Grades kann man allgemein schreiben als:

$$f(x) = a\,x^4 + b\,x^3 + c\,x^2 + d\,x + e \text{ mit } a\neq 0;$$

die Ableitungen sind dann $f'(x) = 4\,a\,x^3 + 3\,b\,x^2 + 2\,c\,x + d$; $f''(x) = 12\,a\,x^2 + 6\,b\,x + 2\,c$.

Nicht jede solche Funktion hat aber auch wirklich zwei Wendestellen. Wir betrachten im Folgenden nur die Funktionen 4. Grades, die wirklich zwei Wendestellen haben; dafür muss die zweite Ableitung zwei verschiedene Nullstellen x_1, x_2 haben. Man kann sie also schreiben als:

$$f''(x) = 12\,a\,(x - x_1)\,(x - x_2).$$

Außerdem machen wir uns das Leben noch ein weniger einfacher: Wir verschieben den Funktionsgraph so, dass die linke der beiden Wendestellen zu $x_1 = 0$ wird (durch das Verschieben ändern sich ja Verhältnisse von Streckenlängen nicht!); die zweite Wendestelle x_2 nennen wir im Folgenden x_W. (Weil dies die rechte der beiden Wendestelle ist, muss dann $x_W > 0$ sein.) Damit wird die zweite Ableitung zu

$$f''(x) = 12\,a\,x\,(x - x_W) = 12\,a\,x^2 - 12\,a\,x_W\,x.$$

Durch „aufleiten‘‘ kommen wir dann zurück zur 1. Ableitung und von dort zur Funktion selbst:

$$f'(x) = 4\,a\,x^3 - 6\,a\,x_W\,x^2 + d;\quad f(x) = a\,x^4 - 2\,a\,x_W\,x^3 + d\,x + e.$$

Einsetzen der Wendestellen in f(x) liefert die y-Koordinaten weder Wendepunkte. Es ergibt sich:

$$WeP_1(0 \mid e);\quad WeP_2(x_W \mid -a\,x_W^4 + d\,x_W + e)$$

Die Steigung der Sekante durch die beiden Wendepunkte ist damit:

$$m_S = \frac{(-ax_W^4 + dx_W + e) - e}{x_W - 0} = -ax_W^3 + d,$$

und die Gleichung der Sekante ist damit:

$$s{:}\ y = (-ax_W^3 + d)x + t.$$

Einsetzen von WeP_1 liefert sofort $t = e$; also ist die Gleichung

$$s{:}\ y = (-ax_W^3 + d)x + e.$$

Diese Sekante schneiden wir nun mit dem Funktionsgraphen, wir müssen also beide Terme gleichsetzen:

$$ax^4 - 2ax_Wx^3 + dx + e = (-ax_W^3 + d)x + e.$$

Auf beiden Seiten der Gleichung können wir offensichtlich jeweils e abziehen, dann bleibt

$$ax^4 - 2ax_Wx^3 + dx = (-ax_W^3 + d)x.$$

Außerdem suchen wir ja nicht die Wendepunkte als Lösungen dieser Gleichung, sondern zwei andere Punkte; es ist also sicher $x \neq 0$, und damit können wir durch x teilen und erhalten

$$ax^3 - 2ax_Wx^2 + d = -ax_W^3 + d.$$

Auf beiden Seiten der Gleichung können wir dann offensichtlich jeweils d abziehen; es bleibt
$$ax^3 - 2ax_W x^2 = -ax_W^3.$$
Durch $a \neq 0$ können wir auch noch teilen:
$$x^3 - 2x_W x^2 = -x_W^3$$
bzw., wenn man alles auf eine Seite bringt,
$$x^3 - 2x_W x^2 + x_W^3 = 0.$$
Eine Lösung dieser Gleichung ist natürlich $x = x_W$; dies ist aber wieder keine von denen, nach denen wir eigentlich suchen. Wir können also durch $(x - x_W)$ teilen (Polynomdivision: alternativ könnte man den Term auch mittels binomischer Formeln faktorisieren); dann bleibt
$$x^2 - x_W x - x_W^2 = 0.$$
Diese Gleichung können wir nun mit der Mitternachtsformel lösen. Nach Vereinfachen bleibt:
$$x_{1,2} = x_W \cdot \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$
Nun ist aber $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ gleich dem Goldenen Schnitt $\phi \approx 1{,}618$; außerdem kann man nachrechnen, dass $\frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\phi} \approx -0{,}618$ ist. Wir haben also die beiden Lösungen
$$x_1 = -\frac{1}{\phi} x_W; \quad x_2 = \phi\, x_W.$$
Wegen $x_W > 0$ folgt daraus nun sofort, dass der Schnittpunkt S_1 links von beiden Wendepunkten liegt (denn der erste Wendepunkt liegt ja bei 0, der zweite wegen $x_W > 0$ rechts davon, x_1 ist aber negativ) und der Schnittpunkt S_2 rechts von beiden Wendepunkten (denn wegen $\phi > 1$ liegt x_2 rechts von x_W und wegen $x_W > 0$ dann auch rechts vom ersten Wendepunkt). Damit wäre schon mal der erste Teil gezeigt: Die Sekante schneidet den Graphen in zwei weiteren Punkten; einer davon liegt links von beiden Wendepunkten, der andere rechts von beiden.

Außerdem ist $x_2 - 0 = x_2 = \phi\, x_W$. Mit dem Strahlensatz (Vierstreckensatz) folgt daraus dann sofort, dass $|\overline{W_1 S_2}| = \phi\, |\overline{W_1 W_2}|$ gilt, und das heißt definitionsgemäß, dass W_2 die Strecke $\overline{W_1 S_2}$ im Goldenen Schnitt teilt. Weiter ist $x_W - x_1 = x_W + \frac{1}{\phi} x_W = \left(1 + \frac{1}{\phi}\right) x_W$. Weil für den Goldenen Schnitt aber definitionsgemäß gilt
$$\phi^2 - \phi - 1 = 0,$$
folgt
$$\phi^2 = \phi + 1$$
und damit
$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi};$$
also ist $x_W - x_1 = \phi x_W$. Wieder mit dem Strahlensatz folgt daraus, dass $|\overline{S_1 W_2}| = \phi\, |\overline{W_1 W_2}|$ gilt, und das heißt definitionsgemäß, dass W_1 die Strecke $\overline{S_1 W_2}$ im Goldenen Schnitt teilt.

q.e.d.

(Inspiriert von https://www.youtube.com/watch?v=EyyYfK_c34M, aber deutlich abgeändert: Einerseits habe ich mir das Strecken des Graphen gespart, wodurch die Rechnung ein klein wenig komplizierter wurde; andererseits habe ich mir das explizite Berechnen der Streckenlängen gespart und stattdessen den Strahlensatz verwendet, wodurch die Rechnung dann wiederum einfacher wurde.)