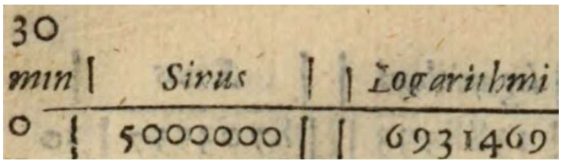
Kapitel 1: Logarithmen-Tabellen

- Der schottische Mathematiker und Theologe John Napier (1550-1617) begann ca. 1594 damit, die ersten Logarithmen-Tabellen zu berechnen; Veröffentlichungen dazu gab es 1614 („Mirifici logarithmorum canonis descriptio“ (Beschreibung des wunderbaren Kanons der Logarithmen), [30]) und 1619 (posthum: „Mirifici logarithmorum canonis constructio“ (Erzeugung des wunderbaren Kanons der Logarithmen)). Er baute teilweise auf Ideen von Michael Stifel (1487-1567) auf: in dessen „Arithmetica integra“ (1544) wurde wohl erstmals der Zusammenhang zwischen geometrischen und arithmetischen Reihen formuliert: Multiplikation/Division in der erste Reihe entspricht Addition/Subtraktion in der zweiten. Napiers Tafeln wurden von Kepler ab ca. 1617 verwendet (für die Herleitung seines dritten Gesetzes?). [1,2,6]
    - Diese erste Logarithmen-Tabelle war vor allem für die Trigonometrie gedacht; da es dort damals üblich war, den Radius eines Kreises in (mindestens) 10 000 000 Teile einzuteilen (um Kommazahlen zu vermeiden, die damals noch nicht allgemein üblich waren), begann er auch mit dieser Zahl. Diese multiplizierte er zunächst immer wieder mit 0,9999999, bis zu $10000000 \cdot 0{,}9999999^{100} \approx 9\,999\,900$; danach multiplizierte er sie immer wieder mit 0,99999, bis $10000000 \cdot 0{,}99999^{50} \approx 9\,995\,001$ und fuhr ähnlich fort; weitere Einträge wurden dann per Interpolation konstruiert.
    - Wegen der Eigenschaft, dass die Verhältnisse von sich ergebenden Zahlen immer gleich sind, wenn die Anzahl der dazwischen liegenden Schritte gleich ist, nannte er diese Anzahlen der Schritte „Verhältniszahlen“, also eben „Logarithmen“ (von lateinisch „logos“ = Verhältnis und „arithmos“ = Zahl).
    - Gilt also $x = 10^7 \cdot (1 - 10^{-7})^y$, so definieren wir y als den „Napier-Logarithmus“ von x und erhalten $y = \frac{\ln\left(\frac{x}{10^7}\right)}{\ln\,(1-10^{-7})}$. Wegen $\ln(1 - 10^{-7}) \approx -10^{-7}$ ergibt das in sehr guter Näherung $y = NapLog(x) = 10^7 \cdot 7 \cdot \ln(10) - 10^7 \cdot \ln\,(x)$; bis auf eine additive Konstante von etwa 161 000 000, das negative Vorzeichen und den Faktor 10^7 ergeben sich hier also letztlich schon natürliche Logarithmen! (Ohne auch nur die entfernteste Vorstellung von der Euler’schen Zahl zu haben!) So ist beispielsweise $NapLog(5\,000\,000) = 6\,931\,469$ (siehe Bild unten, aus [30, S. 128]; Napier berechnete in seinen Tabellen die Logarithmen der Sinuswerte von Winkeln, auf Bogenminuten genau); zum Vergleich: $10\,000\,000 \cdot \ln(2) \approx 6\,931\,472$.



30

min	Sinus	Logarithmi
0	5000000	6931469

    - Außerdem beschrieb er die Konstruktion der Logarithmen auch mit einem geometrischen Modell: Auf einer Strecke AB der Länge 10^7 bewegt sich ein Punkt C so von A nach B, dass seine Geschwindigkeit immer gleich dem Abstand CB ist. Zur gleichen Zeit startet ein Punkt C‘ auf einem Strahl ab A‘; seine Geschwindigkeit ist konstant gleich AB = 10^7. Bezeichnet man den Abstand CB mit x, so folgt AC = 10^7 – x, und da die Geschwindigkeit CB = x mit der Ableitung von AC übereinstimmen muss, also $\frac{d}{dt}(10^7 - x) = x$. Daraus erhält man dann leicht $x = 10^7 e^{-t}$, also $t = \ln\left(\frac{x}{10^7}\right)$. Bezeichnet man außerdem die Position auf dem Strahl mit y, so folgt $y = 10^7 \cdot t$ und damit $y = 10^7 \cdot \ln(10^7) - 10^7 \cdot \ln\,(x)$, was laut der obigen Näherung eben mit dem „Napier-Logarithmus“ übereinstimmt.
    - Diese Definitionen führen aber zu einer komplizierten Funktionalgleichung:

$$\begin{aligned} NapLog(x_1 \cdot x_2) &= NapLog(x_1) + NapLog(x_2) - NapLog(1) \\ &\approx NapLog(x_1) + NapLog(x_2) - 10^7 \cdot \ln(10^7) \end{aligned}$$

- Der englische Mathematiker Henry Briggs (1561-1631) reiste im Sommer 1615 zu Napier und schlug ihm eine alternative, einfachere Definition vor: (1) Der Logarithmus von 1 sollte gleich 0 sein, und (2) es sollte immer mit 10 multipliziert werden statt mit 0,9999999, das heißt, er begründet den dekadischen Logarithmus (und das Konzept einer Basis für Logarithmen wurde damit wohl auch erdacht). Für die dekadischen Logarithmen konstruierte er im Folgenden eine Tabelle mithilfe wiederholten Wurzelziehens („Arithmetica Logarithmica“, 1624). Dabei stellte er fest, dass der dekadische Logarithmus von 1+x, dividiert durch x, für kleine Werte von x konstant ist: $\frac{\log_{10}(1+x)}{x} \approx K$. Wegen $\log_{10}(1+x) = \frac{\ln(1+x)}{\ln(10)} \approx \frac{x}{\ln(10)}$ folgt $K = \frac{1}{\ln(10)} = \lg(e)$; wieder taucht auf Umwegen also der natürliche Logarithmus auf, ohne dass auch nur die entfernteste Vorstellung von der Euler'schen Zahl vorhanden ist. [1,2,5?,6]
- Der englische Mathematiker und Kartograf Edward Wright (1561-1615) übersetzte 1614 Napiers Arbeit (aus dem Lateinischen) ins Englische; dazu wurde ein anonymer Anhang geschrieben, der aber höchstwahrscheinlich vom englischen Mathematiker und Pfarrer William Oughtred (1574-1660) stammt. Darin berechnet Oughtred eine eigene Logarithmen-Tabelle, in welcher der Logarithmus von 1 schon auf 0 festgelegt war und in jedem Schritt durch 0,999999 geteilt wurde. Damit ergibt sich effektiv: $OughtLog(x) \approx 10^6 \cdot \ln(x)$. Deshalb taucht für x = 10 in der Tabelle dann der Wert $10^6 \cdot \ln(10) = \frac{10^6}{\lg(e)} \approx 2302585$ auf. [4]
- Der Schweizer Uhrmacher, Astronom und Mathematiker Jost/Jobst Bürgi (1552-1632) konstruierte unabhängig von Napier eine Logarithmen-Tabelle mit ganz ähnlichen Methoden (angefangen evtl. schon 1588, veröffentlicht aber erst 1620: „Arithmetische und geometrische Progress Tabulen“; Kepler war die Arbeit wohl schon ab ca. 1603 bekannt, und er verwendete sie auch, er musste aber ein Schweigegelübde ablegen!). Er begann mit 100 000 000, was aber eigentlich als 1,00000000 zu lesen ist, und multiplizierte immer wieder mit 1,0001. Außerdem bezeichnete er nicht den eigentlichen Exponenten, sondern das zehnfache davon als „rote Zahl“ (entsprechend der heutigen Idee des Logarithmus'). Damit folgt $B\ddot{u}rLog(x) = 10 \cdot \frac{\ln(x)}{\ln(1+1\;\;^{-4})} \approx 10^5 \cdot \ln(x)$. Allerdings ist Bürgis Tabelle letztlich eher eine Exponential-Tabelle: Die Logarithmen (rote Zahlen) kommen nur in Zehnerabständen vor, die Numeri dagegen auf viele Stellen genau – im Gegensatz zu den Tabellen von Napier, Oughtred und Briggs. Wenn man dagegen annimmt, dass die roten Zahlen 10, 20, … ebenfalls in Wirklichkeit als Kommazahlen zu lesen sind, und zwar passend zu seinem Faktor von 1,0001 als Zehntausendstel 0,0001, 0,0002 usw., dann ist sogar $B\ddot{u}rLog(x) \approx \ln(x)$! [1,2?,3,5?,6]
- Außerdem gab es wohl noch viele andere ähnliche Arten, Logarithmen zu definieren… [9, Seite 3-4]

Kapitel 2: Logarithmus aus Integralen und Reihenentwicklungen

- Der belgische Jesuiten-Mathematiker Grégorie de Saint-Vincent (1584-1667) bewies in Proposition 130 seines Buches ,,Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni" (geschrieben wohl zwischen 1617 und 1625, veröffentlicht erst 1647), dass, wenn Flächeninhalte $A_{a,b}$ bzw. $A_{b,c}$ unter einer Hyperbel zwischen a und b bzw. zwischen b und c gleich sind, dann a und b bzw. b und c im selben Verhältnis zueinander stehen müssen (letztlich mit einem Beweis analog zur Exhaustionsmethode bei Archimedes, der in -zig Propositionen davor schrittweise geführt wurde; laut [5] war das auch dem französischen Juristen und ,,Hobby"-Mathematiker Pierre de Fermat (1601-1665) bekannt!). Sein Schüler und späterer Kollege, der flämische Mathematiker Alphonse Antonio de Sarasa (1618-1667), zeigte 1649, dass daraus folgt, dass sich Flächeninhalte unter einer Hyperbel wie Logarithmen verhalten. Dabei blieb er aber völlig allgemein, er zeigte, dass sich je nach Wahl der Hyperbel ein anderer Logarithmus ergibt (zu jeweils verschiedenen geometrischen Folgen der Ordinaten und damit auch der Abszissen gehören jeweils verschiedene arithmetische Folgen der Flächeninhalte). [1,2,5,6,9] Saint-Vincent zeigte auch, dass der Flächeninhalt eines Hyperbelsegments gleich dem Flächeninhalt eines entsprechenden Stücks unter der Hyperbel mit demselben Hyperbelbogen ist. [8, S. 24f]
- Zum Amsterdamer Stadtregenten und Mathematiker Johan Hudde (1628-1704) schreibt Hofmann [23a, S. 44]: ,,Er verfasste 1656 ein (derzeit verschollenes) Mskr. über Infinitesimalprobleme, worin die Hyperbelquadratur in Form der logarithmischen Reihe enthalten ist (brieflich 1662)". (Laut Anmerkung 4 in Vermij [24] hat Gregory, als er Hudde besuchte, einen Brief von 1661 gesehen, in dem die Reihe vorkam, und Hudde behauptete, dass er diese 1654 gefunden hat. Siehe auch Hofmann [23c]?)
- Der niederländische Physiker, Astronom und Mathematiker Christiaan Huygens (1629-1695) berechnete 1661 (? laut Hofmann [23a, S. 44]) Logarithmen durch Hyperbelquadratur.
- Der irische Peer und Mathematiker William Brouncker (1620?-1684) veröffentlichte 1668 Reihen für Flächeninhalte bei Hyperbeln, die er wohl 1654 entdeckt hatte: Der Flächeninhalt unter der Hyperbel (bzw. in seiner Zeichnung eigentlich über der Hyperbel!) ist $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+\frac{1}{7\cdot 8}+\frac{1}{9\cdot 10}+\cdots$, wenn sich die Seitenlängen der Fläche wie 1 zu 2 verhalten. (Er erkannte aber anscheinend nicht, dass man dies auch als $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\cdots$ schreiben kann? Andererseits nutzte er im Beweis für den Zusammenhang zwischen den Reihen, dass $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\cdots$ gegen 1 konvergiert, ihm war also wohl durchaus klar, dass man dies als die Teleskopsumme $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$ schreiben kann!) Außerdem gab er auch eine schneller konvergierende Reihe für den Inhalt einer Fläche zwischen Sekante und Hyperbel an: $\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 7\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 9\cdot 10}+\cdots$, aus welcher man dann den Flächeninhalt unter (bzw. über) der Hyperbel bestimmen kann (im Beispiel: 0,75 minus das Ergebnis). Zur Begründung verwendete er eine unendliche Summe von Rechtecken bzw. von Dreiecken, also analog zur Exhaustionsmethode bei Archimedes. Er schätzte die Summe für das Seitenverhältnis 1 zu 2 (also ln(2)) ab als kleiner als 0,69314720 und größer als 0,6934709. Anschließend berechnete er auch ähnliche Flächeninhalte für andere Verhältnisse der Seitenlängen und gab abschließend als Beispiel an, dass sich die Logarithmen von 10 und von 2 wie 2,302585 zu 0,693147 verhalten. [11]
- Der englische Physiker, Astronom und Mathematiker Sir Isaac Newton (1642-1726) drückte in einem Manuskript, das wahrscheinlich 1665 geschrieben wurde [12, S. 102-106] $\frac{1}{1+x}$ als

geometrische Reihe aus und integrierte diese gliedweise, um den Inhalt z der Fläche unter der Hyperbel zu erhalten, sprich: er erhielt wohl als erster die Reihe

$$\mathrm{z} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

Er erkannte, dass sich die ergebenden Zahlen wie Logarithmen verhalten (er war wohl mit den Ergebnissen von Saint-Vincent und Sarasa vertraut?) und berechnete daraus eine kurze Logarithmen-Tabelle (auf 55 oder 57 Stellen?!), aber er schrieb anscheinend nichts zum Zusammenhang mit den Napier'schen und Briggs'schen Logarithmen. Laut Hofmann [23b, S. 6] kannte er auch die verbesserte Reihe von Gregory.

In ,,De analysi per aequationes numero terminorum in nitas" [13] (das Manuskript ging 1667 unter Gelehrten um, wurde wohl auch bei der Royal Society zur Veröffentlichung eingereicht, aber nicht angenommen und letztlich erst 1711 veröffentlicht, als ,,Methodus fluxionum et serierum infinitarum cum eisudem applicatione ad curvarum geometriam") ermittelte er auch die ersten fünf Summanden der Umkehrung dieser Reihe:

$$x = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5 \ldots,$$

was natürlich genau die Reihe für $e^z - 1$ ist. Er erkannte auch das allgemeine Bildungsgesetz der Zahlen im Nenner als Produkte jeweils der Zahlen aus der arithmetischen Folge 1, 2, 3, 4, 5 usw., wie z. B. in der ,,Epistola prior" deutlich wird, dem ersten Brief, den Newton (über Oldenburg) am 7.8.1676 an Leibniz schickte [33]. Allerdings hat er wohl hier nicht erkannt, dass dieses Ergebnis etwas mit dem Exponieren zu tun hat; stattdessen redet er von der ,,Basis" der Hyperbelfläche bzw. im Brief an Leibniz davon, dass man daraus die Zahl erhält, die zum entsprechenden Logarithmus gehört. Auch ist ihm sicher nicht bewusst geworden, dass sich aus dieser Reihe für z = 1 eine wichtige mathematische Konstante ergibt.

- Der schottische Mathematiker und Astronom James Gregory (1638-1675) veröffentlichte 1667 eine Quadratur von Hyperbelsegmenten durch ein- und umbeschriebene Polygone; mit der von St. Vincent bewiesenen Flächengleichheit erhielt er also dann auch Flächeninhalte unter der Hyperbel. Damit berechnete er u.a. mittels ein- und umbeschriebenen 2^{20}-Ecken [8,18] den natürlichen Logarithmus von 10 auf 25 Dezimalen (S. 48 in [7a]). Er gab auch (in [7b], S. 12f?) eine verbesserte Reihe für den Logarithmus an, basierend auf

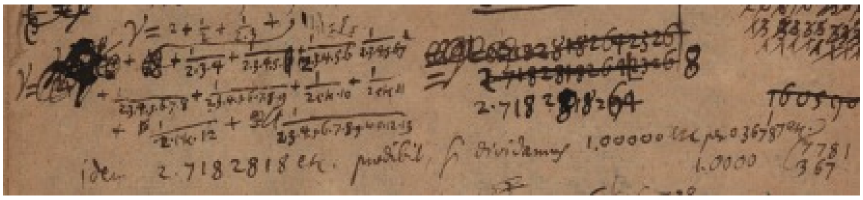
$$\int_{-x}^{x} \frac{dt}{a+t} = \int_{-x}^{x} \frac{a\,dt}{a^2 - t^2} = \ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right).$$

  Dies alles formulierte er aber im antiken griechischen Mathematik-Stil, sodass es heutzutage sehr schwer fällt, die eigentlich bekannten Formeln in seinem Werk wiederzuerkennen…
  (siehe dazu auch Hofmann [23a, S. 55] und [23b, S. 5])
- Der deutsche Mathematiker und Astronom Nicolaus Mercator (1620-1687, eigentlich Nikolaus Kauffman) berechnete in den ersten beiden Teilen der ,,Logarithmotechnia" ([14a], 1668) eine Logarithmen-Tabelle für Zahlen zwischen 1 und 10 mittels 10 000 000 geometrischer Mittelwerte (,,ratiunculae"). Im dritten Teil leitete er dann die Reihe für ln(1+x) her, die auch Newton schon gezeigt hat (laut Burn [9] aufbauend auf Sarasa?); statt gliedweiser Integration verwendete er aber für die Flächenberechnung eine Methode ähnlich zu Cavalieri (im Wesentlichen Aufsummieren von Rechtecken); auch gab er das Resultat nicht als Formel an, sondern nur in Worten. Außerdem prägte er in ,,Some illustration of the Logarithmotechnia of M. Mercator, who communicated it to the publisher, as follows" [14b, S. 761] auch die Bezeichnung ,,natürlicher Logarithmus" (laut Hofmann [23a, S. 55], übernahm er das von Mengoli, s. u.; das geht aus dem Text aber nicht hervor! außerdem spricht er an anderen Stellen stattdessen auch vom ,,absolutem Logarithmus") und erklärte, wie man mithilfe des Umrechnungfaktors 0,43429448190 (was 1/ln(10) entspricht) aus seinen Tabellen auch

Logarithmen zur Basis 10 erhalten kann (ohne Briggs zu erwähnen; auch war ihm wohl nicht klar, dass der natürliche Logarithmus i. W. dem von Napier bzw. Oughtred entspricht.) [2,6]

- Der englische Mathematiker John Wallis (1616-1703) schrieb (laut Hofmann [23b, S. 4]) einen Review zu Mercators Werk in den ,,Philosophical Transactions of the Royal Society" (im selben Band, in dem Mercator direkt danach den Begriff ,,natürlicher Logarithmus" prägte [14b], s. o.), in dem er darauf hinwies, dass Mercators Reihe für ln(1+x) nur für x < 1 gilt; außerdem leitete er auch die entsprechende Reihe für ln(1-x) her.
- Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716): Laut [31] entwickelte er bereits im Juli 1676 die Reihe für den Logarithmus und deren Umkehrung (gemeint ist wohl ,,De inventione logarithmorum sine tabulis", S. 380ff in [35], dort datiert auf zwischen Juli und 24. August) und gab diese in seiner Antwort auf Newtons ,,Epistola prima" (am 27.8.1676, [2] und S. 547 in [33]) auch an: Er schrieb sinngemäß, dass er aus l = ln(1+n) und $l = \ln\frac{1}{1-m}$ jeweils die Reihen für n bzw. m erhalten hätte (also für $n = e^l - 1$ und $m = 1 - e^{-l}$), ohne genauer zu erklären, wie er das gemacht hatte. Auf S. 576 in [33] findet sich als Anmerkung des Herausgebers eine Erklärung (die Leibniz anscheinend im ersten Konzept des Briefes zumindest andeutete, in der endgültigen Fassung dann aber nicht mit einschloss): Ausgehend von $l = \ln(1+n) = \int_0^n \frac{dt}{1+t}$ ging Leibniz zur Differenzialgleichung $\frac{dn}{dl} = 1 + n$ über und löste diese durch Reihenentwicklung. Zumindest eine Rechnung, die bestätigt, dass die gefundene Reihe tatsächlich die Differenzialgleichung löst, findet sich auch in ,,De inventione logarithmorum sine tabulis" [35], siehe oben. (Siehe dazu auch [34]?) Veröffentlicht wurden diese Reihen erst im April 1691 in ,,Quadratura arithmetica communis sectionum conicarum quae centrum habent".
  Er war auch anscheinend der erste, der einen Buchstaben für die ,,Euler'sche" Zahl benutzte: In seiner Korrespondenz mit Huygens von Anfang 1691 redete er unter anderem über eine Kurve, die auch den Zusammenhang zwischen Zeit t und Geschwindigkeit v bei einer Bewegung mit Luftwiderstand beschreibt; diesen Zusammenhang gab er zunächst als Reihe an:
  $$t = \frac{1}{1}v + \frac{1}{3}v^3 + \frac{1}{5}v^5 + \cdots$$
  und wies dann darauf hin, dass man dies auch als Integral schreiben kann:
  $$t = \int \frac{dv}{1-v^2}.$$
  Dies stellte er dann um zum exponentiellen Zusammenhang
  $$b^{t/2} = \frac{1+v}{1-v}$$
  (die zwei ist in der Quelle allerdings nicht lesbar!) und sagte dazu, dass b eine konstante Größe ist, deren Logarithmus gleich 1 ist. Er wies zwar explizit darauf hin, dass es sinnvoll und einfacher ist, solche exponentiellen Ausdrücke zu verwenden statt Reihen – aber dennoch ging er hier nicht den wichtigen letzten Schritt, tatsächlich einen Zahlenwert für diese Größe anzugeben, und es wird noch nicht einmal angedeutet, wie sie zu berechnen ist. (Brief Nr. 6 in [15]; vermutlich ging Leibniz davon aus, dass Huygens selbst weiß, wie man diese Zahl berechnet?)
  Im Juni 1691 veröffentlichte er dann seine Konstruktion der Kettenlinie, für die er explizit die Zahl e (als Basis des natürlichen Logarithmus) benötigte. Diese Zahl (und ihren Kehrwert) berechnete er mittels der Exponentialreihe – allerdings veröffentlichte er den Zahlenwert nicht, sondern gab in der Konstruktion nur zwei Strecken vor, deren Verhältnis eben gleich e ist! In einem Brief (Nr. 24 in [15]) an Rudolph Christian von Bodenhausen gab er das Verhältnis der Streckenlängen (also eben e) auf 7 Nachkommastellen genau an und erklärte in einem weiteren Brief (Nr. 33 und Beiblatt 34 in [15]) auch, wie er auf die Konstruktion kam, gab aber

auch dort nicht ab, wie er genau diesen Zahlenwert errechnet hatte. Nur in seinen privaten Aufzeichnungen fand sich später die genaue Rechnung: Er summierte die Kehrwerte der Fakultäten bis 14! auf, um e zu erhalten (er nannte die Zahl γ) bzw. den Kehrwert davon (β). Dabei machte er allerdings einen Rechenfehler (in zwei Kehrwerten jeweils um zwei Dezimalen ,,verrutscht''), sodass sein Ergebnis nur in den ersten 8 Dezimalen korrekt war. [31, 32]



In der Konstruktionsbeschreibung für die Kettenlinie ist nur die Rede von einer ,,logarithmischer Kurve'' (der Begriff der Exponentialfunktion war ja noch nicht geprägt), ein expliziter Funktionsterm wurde nicht hingeschrieben – was seltsam ist, denn in der oben erwähnten Korrespondenz mit Huygens hatte er ja den logarithmischen Zusammenhang umgeformt zu einem exponentiellen und sogar explizit darauf hingewiesen, dass dies sinnvoll ist! Die Bezeichnung γ taucht in der Konstruktionsbeschreibung nirgends auf, und es wird darin auch nicht klar gemacht, warum genau diese Zahl wichtig für die Konstruktion ist. Im oben erwähnten zweiten Brief an Bodenhausen wird zwar erwähnt, dass man jede logarithmische Kurve auch durch den exponentiellen Zusammenhang $y = b^x$ beschreiben kann, und es wird wieder betont, wie wichtig exponentielle Zusammenhänge sind. Außerdem wird gezeigt, dass dann die Differenzialgleichung $a\,dy = y\,dx$ gilt, und es wird auch erwähnt, dass man im speziellen Fall des natürlichen Logarithmus genau $a = 1$ erhält. Aber wieder wird eben nicht erwähnt, dass man in diesem Fall genau $b = \gamma \approx 2{,}7182818$ ist (und dass in allen anderen Fällen $a = \frac{1}{\ln(b)}$ ist), obwohl diese Zahl eben im ersten Brief explizit als wichtig für die Konstruktion der Kettenlinie erwähnt wurde. Es entsteht der Eindruck, dass auch hier Leibniz immer noch nicht wirklich klar war, wie fundamental wichtig diese Zahl und die zugehörigen exponentiellen Ausdrücke eigentlich sind.

Kapitel 3: Reihen für den Logarithmus bzw. die Exponentialfunktion ohne Bezug zur Hyperbel

- Der italienische Mathematiker und Geistliche Pietro Mengoli (1626-1686) erklärte 1659 in seinem Buch „Geometriae speciosae elementa“, wie man für ein beliebiges rationales Verhältnis $\frac{p}{q} > 1$ mit jeweils zwei Folgen („Hyperlogarithmus“ und „Hypologarithmus“) aufstellen kann, die jeweils von oben bzw. von unten gegen den Logarithmus des Verhältnisses konvergieren. (Laut Hofmann [23a, S. 40] geht das auf die Arbeit Saint-Vincents zurück; Hofmann behauptet hier auch, das Buch wäre schon um 1648 geschrieben worden!? Laut Burn [9] fand Mengoli zumindest die Reihen für ln(2) schon 1650?) Beide Folgen bestehen jeweils aus Teilsummen der harmonischen Reihe: Der Hyperlogarithmus hat die Folgenglieder $\sum_{k=qn}^{pn-1} \frac{1}{k}$, der Hypolo-garithmus dagegen $\sum_{k=qn+1}^{pn} \frac{1}{k}$. Er bewies, dass der Hyperlogarithmus streng monoton fallend ist, der Hypologarithmus dagegen streng monoton steigend, dass der Hyperlogarithmus stets größer ist als der Hypologarithmus, und dass ihre Differenz gegen 0 geht. Also haben die beiden Folgen jeweils einen gemeinsamen Grenzwert, den er mit dem Logarithmus des Verhältnisses $\frac{p}{q}$ identifizierte. Zur Begründung dieser Identifikation argumentierte er, dass der so definierte Logarithmus des Produkts zweier Verhältnisse gleich der Summe der Logarithmen der beiden Verhältnisse ist. Es ergibt sich hier speziell der natürliche Logarithmus; Mengoli ging nicht darauf ein, dass es verschiedene Definitionen des Logarithmus‘ gab und wies auch nicht darauf hin, dass seine Ergebnisse im Wesentlichen mit denen von Napier bzw. Oughtred übereinstimmten. Er nannte das Ergebnis dann allerdings die „natürliche Größe jedes Verhältnisses“ (cuiusque rationis quantitas naturalis), man könnte also argumentieren, dass er der erste war, der vom *natürlichen* Logarithmus redete. All dies bewies er nicht streng und allgemein, sondern nur rein verbale Argumentation anhand der Beispiele $\frac{p}{q} = \frac{2}{1}$ bzw. $\frac{3}{2}$ bzw. $\frac{3}{1}$ bzw. $\frac{4}{1}$; in allen Fällen gab er nur die Reihen an, keine konkreten Ergebnisse! (Für natürliche Zahlen $\frac{p}{q}$ kann man eigene Beweise dafür leicht finden, bei nicht natürlichen Zahlen ist es unklarer.) Insbesondere im Spezialfall $\frac{p}{q} = \frac{2}{1}$ entsprechen die Folgenglieder des Hyper- bzw. Hypologarithmus abwechselnd genau den Partialsummen der bekannten alternierenden Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2)$; so kam wohl die Behauptung zustande, dass Mengoli diese Formel bewiesen habe, obwohl sie sich in seinen Arbeiten nirgends findet. (Laut diversen Quellen soll er das angeblich schon 1650 in „Novae quadraturae arithmeticae, seu de additione fractionum“ bewiesen haben, dort ist aber nichts zu Logarithmen zu finden.) [10] Mengolis Arbeit hatte anscheinend keinen Einfluss auf die folgende Entwicklung der Logarithmen; sie wurde zwar (laut Hofmann [23a, S. 40]) durch Gregory in England bekannt gemacht, geriet jedoch wegen der undurchsichtigen Darstellung schnell wieder in Vergessenheit.
- Der Schweizer Physiker und Mathematiker Jakob I Bernoulli (1655-1705) untersuchte 1690 die Frage, wie viel ein Gläubiger nach einem Jahr schuldet, wenn in jedem Augenblick der dem Jahreszins entsprechende Anteil an Zinsen hinzugerechnet wird (also: stetige Verzinsung). Dies löste er aber nicht mittels des Grenzwertes $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, sondern indem er die momentane Änderungsrate des Kapitals als proportional zum Kapitel ansetzte und als Lösung für diese Differenzialgleichung eine Potenzreihe angab: Für das Anfangskapitel a und den Jahreszins b ergibt sich $a + b + \frac{b^2}{2a} + \frac{b^3}{2\cdot 3a^2} + \frac{b^4}{2\cdot 3\cdot 4a^3} + \frac{b^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5a^4} + \cdots$ (Diese Lösung wurde allerdings evtl. aus $a \cdot \left(1 + \frac{b}{a\cdot n}\right)^n$ mittels des binomischen Satzes erhalten, auch wenn es darauf keine direkten Hinweise gibt. Eine andere Möglichkeit wäre der Ansatz einer Potenzreihe mit unbekannten Koeffizienten, einsetzen in die Differenzialgleichung und Koeffizientenvergleich; diese

Methode findet sich allerdings erst 1693 bei Leibniz und erst 1704 bei Bernoulli selbst.) Für die Spezialfälle a = 20, b = 1 und a = b gab er explizite Abschätzungen an; im zweiten Fall, dass mehr als 2,5a und weniger als 3a geschuldet werden. Da sich im zweiten Fall $a \cdot \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \cdots\right)$ ergibt, hat man damit die erste Abschätzung des Wertes der Euler'schen Zahl – allerdings ohne zu erkennen (oder wie bei Leibniz sogar zu betonen), dass diese Zahl eine fundamentale mathematische Konstante ist! Es wurde erkannt, dass diese Reihe genau gewisse Längenverhältnisse an der Logarithmuskurve angibt, aber anscheinend nicht, dass der (natürliche) Logarithmus genau bei dieser abgeschätzten Zahl den Wert 1 annimmt. [16, 17]

- Der englische Astronom, Mathematiker, Kartograph, Geophysiker und Meteorologe Edmond Halley (1656-1742) zeigte (auch unter Verwendung des Begriffs ,,ratiunculae'', den er wohl von Mercator übernahm?) 1695, dass Logarithmen definiert werden können als

$$\log(1+x) \sim \lim_{m\to\infty} \frac{(1+x)^{1/m}-1}{1/m}$$

und dass daraus

$$\log(1+x) \sim x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots$$

folgt. Er wies auch darauf hin, dass man den Napier'schen Logarithmus im Wesentlichen mit einem Proportionalitätsfaktor von 1 bekommt (bzw. unter Berücksichtigung des Vielfachen Faktor 10 000?), und dass der Umrechnungsfaktor zum Brigg'schen Logarithmus etwa 2,302585… ist (also ln(10); auf 60 Stellen angegeben, der Kehrwert auch!). Er gab auch eine sehr schnell konvergierende Reihe für die Berechnung der Logarithmen von Primzahlen an (mithilfe des geometrischen und arithmetischen Mittels benachbarter Zahlen?) und die (natürlichen) Logarithmen der ersten sieben Primzahlen auf 60 Stellen genau (berechnet von einem gewissen Abraham Sharpe???). Er zeigte, wie Newton, auch die Umkehrung: Ist ein Logarithmus L gegeben, so findet man das zugehörige Verhältnis (also den Numerus) aus der Reihe $1 + mL + \frac{1}{2}m^2L^2 + \frac{1}{6}m^3L^3 + \frac{1}{24}m^4L^4 + \frac{1}{120}m^5L^5 + \cdots$, wobei insbesondere für den Napier'schen Logarithmus m = 1 ist. Aber auch er erkannte nicht (im Gegensatz zu Leibniz), dass die Umkehrung als ,,exponieren'' geschrieben werden kann, und dass sich für L = 1 eine fundamentale Konstante ergibt. [18,19]
- Der französische Mathematiker Abraham de Moivre (1667-1754) setzte in ,,A Method of extracting the Root of an Infinite Equation'' [25] an (siehe dazu auch Hofmann [23b, S. 7]), dass man den Logarithmus durch eine Potenzreihe mit erst mal unbekannten Koeffizienten schreiben kann,

$$\log(1+z) = az + bz^2 + cz^3 + \cdots$$

Wenn außerdem $1 + z = (1+y)^n$ ist, dann folgt

$$\log(1+z) = \log(1+y)^n = n \cdot \log(1+y) = n \cdot (ay + by^2 + cy^3 + \cdots),$$

also

$$az + bz^2 + cz^3 + \cdots = nay + nby^2 + ncy^3 + \cdots$$

Links kann man nun $z = (1+y)^n - 1$ einsetzen,

$$a((1+y)^n - 1) + b((1+y)^n - 1)^2 + c((1+y)^n - 1)^3 + \cdots = nay + nby^2 + ncy^3 + \cdots$$

Löst man die Klammern links mithilfe des binomischen Lehrsatzes auf, so ergibt sich durch Koeffizientenvergleich ein lineares Gleichungssystem für die unbekannten Koeffizienten; nur der Wert von a kann nicht bestimmt werden (durch dessen Wahl ergeben sich dann eben verschiedene Logarithmen, insbesondere der natürliche Logarithmus für a = 1). Das n fällt in der Rechnung dabei komplett raus. (de Moivres Rechenweg war eigentlich ein klein wenig anders; statt des Koeffizientenvergleichs im letzten Schritt verwies er auf eine allgemeine

Formel zur Berechnung der Koeffizienten einer Potenzreihe in z, die mit einer Potenzreihe in y übereinstimmt; diese Formel gab und begründete er am Anfang des Artikels.)

- Der englische Mathematiker Roger Cotes (1682-1716) redete in ,,Logometria‘‘ ([26], fertig wohl schon Ende 1711, veröffentlicht aber erst 1714; siehe dazu auch Hofmann [23b, S. 7f]) in der Einleitung einerseits von einem ,,Maß für Verhältnisse‘‘, andererseits auch von Logarithmen (mit beidem scheint er aber letztlich dasselbe zu meinen?!?). Er leitete dann eine Reihe für $\log\left(\frac{z+x}{z-x}\right)$ her (mit beliebiger Basis; den dafür nötigen konstanten Vorfaktor nennt er das ,,Modul‘‘ M, den Logarithmus selbst ein ,,Maß für Verhältnisse‘‘), wobei z eine Konstante ist und x eine Funktion von t. Dafür berechnete er $\frac{d}{dt}\left(\frac{z+x}{z-x}\right) / \left(\frac{z+x}{z-x}\right)$, also $\frac{d}{dt}\log\left(\frac{z+x}{z-x}\right)$, entwickelte das Ergebnis in eine geometrische Reihe und integrierte dann wieder gliedweise. (Diese Vorgehensweise beruht auf einer davor gegebenen geometrischen Begründung, die letztlich $\log(a^z) = z \cdot \log(a)$ ausdrückt.) Anschließend schrieb er, dass man auf dieselbe Weise auch Reihen für $\log\left(\frac{1+x}{1}\right)$ und $\log\left(\frac{1-x}{1}\right)$ (also für die ,,Maße dieser Verhältnisse‘‘) finden kann (wieder zu beliebiger Basis, also mit beliebigem ,,Modul‘‘ M) und zeigte auch, wie man diese Reihen umkehren kann, um x zu finden. (Er entwickelte dabei alle Reihen nur bis zur fünften Potenz und führte alle Rechnungen, auch die Umkehrungen, nur exemplarisch vor, nichts wurde streng bewiesen. Auch wurde nicht erkannt, dass die Umkehrung irgendetwas mit exponieren zu tun hat – das Konzept der Exponentialfunktion war ja noch nicht bekannt! In der Exponentialreihe wurde auch nicht die Fakultät verwendet; das allgemeine Bildungsgesetz wurde aber erkannt und rekursiv formuliert!) Schließlich betrachtete er den Spezialfall, dass das ,,Maß des Verhältnisses‘‘ gleich 1 ist, und folgerte, dass das Verhältnis dann gegeben ist durch $1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \cdots$ bzw. $1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \cdots$, und gab diese Verhältnisse (also e bzw. 1/e) jeweils auf 12 Dezimalen genau an.

  terminum majorem expoſitum S & minorem inventum R. Porro eadem ratio eſt inter 2,718281828459 &c. et 1, vel inter 1 & 0,367879441171 &c.

  Hier tauchte also erstmals der Wert von e in erkennbarer Weise in einer veröffentlichten Arbeit auf; auch hier ist aber unklar, ob wirklich erkannt wurde, dass diese Zahl wichtig und ,,natürlich‘‘ ist. Im Folgenden gab er dann erstmals auch noch eine Kettenbruchentwicklung für e an und erklärte, wie man daraus sukzessive rationale Näherungen für e berechnet. Anschließend erklärte er, wie man zwischen den eben gefundenen Logarithmen und den Brigg’schen Logarithmen umrechnet; den Umrechnungsfaktor (also $\ln(10)$) und dessen Umkehrung gab er dabei jeweils 12 Dezimalen genau an. Für die Berechnung verwendet er $\ln(10) \approx 239\ln\left(\frac{126}{125}\right) + 90\ln\left(\frac{225}{224}\right) - 63\ln\left(\frac{2401}{2400}\right) + 103\ln\left(\frac{4375}{4374}\right)$, erklärte aber nicht im Mindesten, wie er darauf kam! Ähnliche Formeln gab er, wieder ohne Begründung, für die Logarithmen von 7, 5 und 3 an, und erklärte, dass man den Logarithmus von 2 als Differenz der Logarithmen von 10 und von 5 erhält, und auch, wie man mittels einer Logarithmentafel dann auch näherungsweise Logarithmen für Zwischenwerte ermitteln kann. Anschließend ging er noch kurz darauf ein, wie man auf Logarithmen zu beliebigen Basen umrechnen kann. Den Hauptteil der Schrift bilden dann viele Anwendungen des Formalismus für Flächenberechnungen.

Kapitel 4: Euler

Der Schweizer Mathematiker, Physiker, Astronom, Geograph, Logiker und Ingenieur Leonhard Euler (1707-1783) war anscheinend der Erste, der die fundamentale Bedeutung der Zahl erkannte, deren natürlicher Logarithmus gleich 1 ist, und er schrieb von Anfang an konsequent den Buchstaben e dafür und gab den Wert der Zahl auch auf mehrere Dezimalen genau an. [22]

- 1727 oder 1728 verwendete er dies wohl zum ersten Mal, im Artikel „Meditatio in experimenta explosione tormentorum nuper instituta“ über Explosivkräfte in Kanonen, der allerdings erst 1862 veröffentlicht wurde: „Scribatur pro numero cujus logarithmus est unitas, e, qui est 2,7182817…“ (deutsch: „Geschrieben für die Zahl, deren Logarithmus die Einheit e hat, die 2,7182817… ist …“)
- Außerdem taucht e auch in einem Brief Eulers an Christian Goldbach vom 25. November 1731 auf: „…e denotat hic numerum, cujus logarithmus hyperbolicus est = 1, ...“ (deutsch: „… e bezeichnet die Zahl, deren hyperbolischer [d.h. natürlicher] Logarithmus gleich 1 ist, …)“
- Als nächste gesicherte Quelle für die Verwendung dieses Buchstabens gilt Eulers Werk ,,Mechanica sive motus scientia analytice exposita, II‘‘ aus dem Jahre 1736.

Aber erst in seinem Lehrbuch ,,Introductio in analysin infinitorum‘‘ (1748) führte Euler dann all die verschiedenen Konzepte zu Logarithmen und zur ,,Euler’schen‘‘ Zahl zusammen zu einem stimmigen Gesamtbild. (Alles Folgende stammt im Wesentlichen aus Edwards [6].) Dafür war allerdings ein anderer wichtiger Fortschritt in der Mathematik die Voraussetzung: Vor Euler gab es kein allgemeines Konzept einer ,,Funktion‘‘, sondern die primären Untersuchungsobjekte waren Kurven und alle möglichen Linien im Zusammenhang mit diesen bzw. Verhältnisse von Längen dieser Linien. (So wurde beispielsweise auch nicht zwischen den beiden Kurven unterschieden, die wir heutzutage als Graphen der Exponentialfunktion bzw. der Logarithmusfunktion bezeichnen!) Deshalb gab es auch nicht das Konzept der unabhängigen und der abhängigen Variable, sondern letztlich wurden alle vorkommenden Größen als voneinander abhängig betrachtet.

Erst Euler gab in seinem erwähnten Lehrbuch eine ziemlich allgemeine Definition des Funktionsbegriffs und führte darauf aufbauend dann auch erstmals das Konzept der Exponential- und der Logarithmusfunktionen ein. Die unabhängige Variable bezeichnete er meist mit z, für die Exponentialfunktion zur Basis a schrieb er, wie wir heute, a^z, für die Logarithmusfunktion y = lz (ohne die Basis explizit anzugeben), und definierte dabei y als den Exponenten in $a^y = z$.

Um Grenzwertbetrachtungen scherte er sich allerdings nicht (im Unterschied beispielsweise zu James Gregory!), sondern rechnete fröhlich mit einer ,,unendlich kleinen‘‘ Zahl ω und einer ,,unendlich großen‘‘ Zahl i. Nachdem er darauf hingewiesen hatte, dass $a^0 = 1$ ist, schrieb er $a^\omega = 1 + k\omega$ mit einer noch zu bestimmenden Konstanten k. Dann definierte er für vorgegebenes z eben die entsprechende ,,unendlich große‘‘ Zahl $i = \frac{z}{\omega}$ und hatte damit $a^z = a^{i\omega} = (1 + k\omega)^i = \left(1 + \frac{kz}{i}\right)^i$. Dies entwickelte er mit dem binomischen Lehrsatz zu

$$\left(1 + \frac{kz}{i}\right)^i = 1 + kz + \frac{1}{2!}\frac{i(i-1)}{i^2}k^2z^2 + \frac{1}{3!}\frac{i(i-1)(i-2)}{i^3}k^3z^3 + \cdots$$

und argumentierte dann, dass $\frac{i-1}{i} = \frac{i-2}{i} = \cdots = 1$ ist, weil ja i ,,unendlich groß‘‘ ist. Damit bleibt

$$a^z = 1 + \frac{kz}{1!} + \frac{k^2z^2}{2!} + \frac{k^3z^3}{3!} + \cdots$$

bzw. für z = 1

$$a = 1 + \frac{k}{1!} + \frac{k^2}{2!} + \frac{k^3}{3!} + \cdots$$

Nun führte Euler die Zahl e als genau diejenige Zahl ein, für die in dieser Formel k = 1 ist, also

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots,$$

und berechnete diese Zahl auf 23 Dezimalen. (Er bewies nicht, dass diese Reihe überhaupt konvergiert. Laut [17] findet sich erst 1821 in Cauchys Lehrbuch ,,Cours d'Analyse'' [27, Kapitel 6, §1] ein Beweis dafür, aber eigentlich folgt das schon sofort aus dem, was Bernoulli schrieb, s.o.) Aus der Definition folgt dann sofort

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

(vgl. Newton 1669!), und aus dem ursprünglichen Ansatz folgt dann ebenfalls sofort

$$e^z = \left(1 + \frac{z}{i}\right)^i$$

bzw. eben

$$e = \left(1 + \frac{1}{i}\right)^i.$$

Um den Logarithmus zu definieren, schrieb Euler

$$1 + y = a^z = a^{i\omega} = (1 + k\omega)^i;$$

es gilt also

$$\log_a(1 + y) = i\omega.$$

Umstellen liefert

$$\omega = \frac{(1 + y)^{1/i} - 1}{k},$$

und damit ist (vgl. Halley!)

$$\log_a(1 + y) = \frac{1}{k}\frac{(1 + y)^{1/i} - 1}{1/i}.$$

Insbesondere für a = e, also k = 1, ergibt sich

$$\ln(1 + y) = \frac{(1 + y)^{1/i} - 1}{1/i},$$

analog zum heute bekannten Grenzwert. Euler verwendete nun den binomischen Lehrsatz zur Entwicklung von $(1 + y)^{1/i}$ in eine Potenzreihe und leitete damit die Reihe

$$\ln(1 + y) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots$$

her, die schon Newton und Mercator gefunden hatten; dabei verwendete er, dass $\frac{i-1}{i} = \frac{2i-1}{i} = \cdots = 1$ ist, weil ja i ,,unendlich groß'' ist.

Kapitel 5: Eigenschaften und Beweise dazu

- Dass e wirklich irrational ist, bewies eigentlich bereits Euler selbst [22a,22b]; sein Beweis war allerdings ziemlich kompliziert und verwendete ,,Kettenbrüche'' und die ,,Ricatti'sche Differenzialgleichung'' [28] – beides ist definitiv kein Schulstoff. Der französische Mathematiker und Physiker Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) zeigte 1815 in seinen Vorlesungen an der Ecole Polytechnique 1815 dann erstmals einen Beweis direkt aus der Reihendarstellung von e [21,22b]; dieser Beweis findet sich beispielsweise im Wikipedia-Beweisarchiv [22c].
  Man geht aus von der Reihendarstellung für e,
  $$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots$$
  $$= \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \cdots$$
  Wir stellen nun die Vermutung auf, dass man die Euler'sche Zahl als einen Bruch schreiben kann, $e = \frac{p}{q}$ mit natürlichen Zahlen $p, q \geq 1$, und zeigen, dass diese Vermutung auf einen Widerspruch führt. Dafür teilen wir die Summe zunächst auf in den Teil, der bis $\frac{1}{q!}$ geht und die (unendlich vielen) Summanden dahinter,
  $$e = \frac{p}{q} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot q} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot q\cdot (q+1)} + \cdots$$
  und bringen die vorderen Summanden bis $\frac{1}{q!}$ auf die linke Seite,
  $$\frac{p}{q} - \frac{1}{1} - \frac{1}{1} - \frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} - \cdots - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot q} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot q\cdot (q+1)} + \cdots$$
  Dann multiplizieren wir mit $q! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot q$,
  $$\frac{p\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot q}{q} - \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot q}{1} - \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot q}{1} - \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot q}{1\cdot 2} - \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot q}{1\cdot 2\cdot 3} - \cdots$$
  $$- \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot q}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot q} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot q}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot q\cdot (q+1)} + \cdots$$
  und kürzen anschließend (auf der rechten Seite schreiben wir jetzt noch ein paar Summanden mehr hin),
  $$p\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (q-1) - 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot q - 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot q - 3\cdot \ldots \cdot q - 4\cdot \ldots \cdot q - \cdots - 1$$
  $$= \frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} + \cdots$$
  Auf der linken Seite steht nun eine Summe von lauter ganzen Zahlen, also ist die komplette linke Seite eine ganze Zahl – also muss auch die unendliche Summe auf der rechten Seite eine ganze Zahl ergeben. Schauen wir uns die Summanden in dieser unendlichen Summe nun noch genauer an. Wegen $q \geq 1$ ist $q+1 \geq 2$, $q+2 > 2$, $q+3 > 2$ usw. und deshalb $\frac{1}{(q+1)} \leq \frac{1}{2}$, $\frac{1}{(q+1)(q+2)} < \frac{1}{2\cdot 2} = \frac{1}{2^2}$, $\frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} < \frac{1}{2\cdot 2\cdot 2} = \frac{1}{2^3}$, das heißt für die unendliche Summe der rechten Seite gilt die Abschätzung
  $$\frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} + \cdots < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots$$
  Man kann sich nun aber leicht überlegen, dass diese neue unendliche Summe mit lauten Potenzen von ½ sicher nie größer als 1 werden kann (z. B. graphisch: Man male sich ein Quadrat hin mit Seitenlänge 1, also Flächeninhalt 1; der erste Summand ist die Hälfte der Quadratfläche, der zweite Summand ein weiteres Viertel der Quadratfläche, der dritte Summand ein weiteres Achtel der Quadratfläche usw.; offensichtlich kann man, wenn man alle diese Flächen aufsummiert, nie mehr als die komplette Quadratfläche erhalten.) Für die rechte Seite gilt also:

$$\frac{1}{(q+1)}+\frac{1}{(q+1)(q+2)}+\frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)}+\cdots<1.$$

Andererseits summiert man hier ja lauter positive Zahlen, also ist die rechte Seite sicher auch größer als 0. Insgesamt folgt, dass die unendliche Summe auf der rechten Seite eine Zahl zwischen 0 und 1 ergeben muss. Weiter oben hatten wir allerdings gezeigt, dass die unendliche Summe auf der rechten Seite eine *ganze* Zahl ergeben muss! Offensichtlich gibt es aber zwischen 0 und 1 keine ganze Zahl. Damit haben wir einen Widerspruch gefunden, und deshalb muss unsere ursprüngliche Vermutung (eben dass man die Euler'sche Zahl als einen Bruch schreiben kann) falsch sein. Und damit ist bewiesen, dass die Euler'sche Zahl irrational ist.

- Anders gesagt: Man kann e *nicht* als Lösung x einer linearen Gleichung $qx=p$ (also einer Gleichung vom Grad 1) mit ganzen Zahlen q,p schreiben. Es gibt sogar noch eine weit allgemeinere Aussage: Man kann e *nicht* als Lösung *irgendeiner* Polynomgleichung $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$ mit ganzen Zahlen $a_n,a_{n-1},\dots,a_1,a_0$ schreiben, egal wie hoch der Grad n der Gleichung ist! Solche Zahlen nennt man *transzendent* (ein weiteres Beispiel dafür ist die Kreiszahl π). Dass e transzendent ist, zeigte erstmals [21,22a,22b] der französische Mathematiker Charles Hermite (1822-1901) im Jahre 1873 [29]. Ein abgewandelter, vereinfachter Beweis, der auf Hermites Ideen beruht, findet sich ebenfalls im Wikipedia-Beweisarchiv [22c]; dieser ist aber *weit* komplizierter als der obige für die Irrationalität.

  Im Folgenden wird die übliche Abkürzung $n!=n\cdot(n-1)\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$ für $n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$ und $0!=1$ verwendet, weil die Rechenschritte sonst viel zu unübersichtlich werden würden.

  Wir machen wieder einen Widerspruchsbeweis: Wir nehmen an, man könnte e als Lösung einer Polynomgleichung $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$ mit ganzen Zahlen $a_n,a_{n-1},\dots,a_1,a_0$ schreiben, wobei wie üblich $a_n\neq 0$ ist, und werden zeigen, dass diese Annahme auf einen Widerspruch führt. Zunächst sollte man dabei bemerken, dass auch $a_0\neq 0$ gelten muss – denn sonst könnte man x ausklammern und hätte dann sogar eine neue Polynomgleichung für e gefunden, die sogar einen noch kleineren Grad hat.

  Als Abkürzung setzen wir zunächst $\alpha:=2\cdot(n+1)\cdot\max|a_j|$, wobei $\max|a_j|$ für den betragsmäßig größten aller Koeffizienten $a_n,a_{n-1},\dots,a_1,a_0$ steht. Außerdem definieren wir das Polynom $Q(x):=(x-n)\cdot\big(x-(n-1)\big)\ldots\cdot(x-2)\cdot(x-1)$. Man sieht leicht, dass man dieses Polynom durch Ausmultiplizieren auch schreiben kann als $Q(x)=x^n+\cdots+n!$, wobei alle Koeffizienten ganze Zahlen sind.

  Sei nun p irgendeine Primzahl. Es folgt dann zunächst, dass $\big(Q(x)\big)^p=x^{np}+\cdots+(n!)^p$ ist. Außerdem definieren wir noch eine neue Funktion $F(x):=\frac{x^{p-1}}{(p-1)!}\cdot\big(Q(x)\big)^p\cdot e^{-x}$.

  q sei nun eine beliebige natürliche Zahl zwischen 0 und n. Als weitere Abkürzungen definieren wir schließlich noch die Integrale $\varepsilon_{pq}:=e^q\cdot\int_0^q F(x)dx$ und $M_{pq}:=e^q\cdot\int_q^\infty F(x)dx$.

  Nun gilt zunächst für alle $x\in[0;n]$, dass $F(x)\to 0$ für $p\to\infty$, denn der Nenner (p-1)! wächst schneller als jede Potenz von x. Damit folgt auch $\varepsilon_{pk}\to 0$ für $p\to\infty$. Wir können die Primzahl p also so groß wählen, dass sowohl $p>\alpha$ als auch $|\varepsilon_{pk}|<\frac{1}{\alpha}$ für alle möglichen Werte von q gilt. Mit der „Dreiecksungleichung" folgt dann

$$\begin{aligned}&\left|a_n\cdot\varepsilon_{pn}+a_{n-1}\cdot\varepsilon_{pn-1}+\cdots+a_1\cdot\varepsilon_{p1}+a_0\cdot\varepsilon_{p0}\right|\\ &\leq|a_n|\cdot|\varepsilon_{pn}|+|a_{n-1}|\cdot|\varepsilon_{pn-1}|+\cdots+|a_1|\cdot|\varepsilon_{p1}|+|a_0|\cdot|\varepsilon_{p0}|\\ &\leq\max|a_j|\cdot\frac{1}{\alpha}+\max|a_j|\cdot\frac{1}{\alpha}+\cdots+\max|a_j|\cdot\frac{1}{\alpha}+\max|a_j|\cdot\frac{1}{\alpha}\end{aligned}$$

$$=(n+1)\cdot\max|a_j|\cdot\frac{1}{\alpha}=(n+1)\cdot\max|a_j|\cdot\frac{1}{2\cdot(n+1)\cdot\max|a_j|}=\frac{1}{2},$$

  also nochmal zusammengefasst:

$$\left|a_n\cdot\varepsilon_{pn}+a_{n-1}\cdot\varepsilon_{pn-1}+\cdots+a_1\cdot\varepsilon_{p1}+a_0\cdot\varepsilon_{p0}\right|\leq\frac{1}{2}\quad(I).$$

Als nächstes schauen wir uns M_{p0} genauer an:

$$M_{p0} = e^0 \cdot \int_0^\infty F(x)dx = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} \cdot \big(Q(x)\big)^p \cdot e^{-x}dx$$
$$= \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} \cdot (x^{np} + \cdots + (n!)^p) \cdot e^{-x}dx$$
$$= \frac{1}{(p-1)!}\int_0^\infty (x^{np+p-1} + \cdots + (n!)^p x^{p-1}) \cdot e^{-x}dx.$$

Die Integrale über alle Summanden sind aber leicht ausführbar, indem man die Formel

$$\int_0^\infty x^m \cdot e^{-x}dx = m!$$

verwendet, die für alle natürlichen Zahlen m gilt. Wir erhalten also:

$$M_{p0} = \frac{1}{(p-1)!}\big((np+p-1)! + \cdots + (n!)^p(p-1)!\big) = \frac{(np+p-1)!}{(p-1)!} + \cdots + (n!)^p.$$

Alle Summanden sind ganze Zahlen, weil die Koeffizienten von Q^p alle ganzzahlig sind und man die Brüche alle kürzen kann. Außerdem enthält jeder Summand außer dem letzten sicher immer einen Faktor p. Der letzte Summand dagegen ist nicht durch p teilbar, weil ja $p > \alpha$ vorausgesetzt wurde und α einen Faktor (n+1) enthält, also sicher $p > n$ gilt. Es folgt, dass M_{p0} eine ganze Zahl ist, die nicht durch p teilbar ist. (II)

Andererseits erhält man für alle möglichen Werte von q mittels der Substitution $u = x - q$ sofort das Ergebnis

$$M_{pq} = e^q \cdot \int_0^\infty F(u+q)du = \int_0^\infty \frac{(u+q)^{p-1}}{(p-1)!} \cdot \big(Q(u+q)\big)^p \cdot e^{-u}du.$$

Nun gilt aber nach Definition $Q(u+q) = (u+q-n) \cdot \big(u+q-(n-1)\big) \dots \cdot (u+q-1)$, und wenn q zwischen 1 und n liegt, enthält dieses Produkt sicher den Linearfaktor u, also enthält $\big(Q(u+q)\big)^p$ sicher auch den Linearfaktor u. Löst man außerdem noch die Klammer $(u+q)^{p-1}$ auf, so erhält man einen Faktor u^{p-1}; insgesamt enthält das Produkt $(u+q)^{p-1} \cdot \big(Q(u+q)\big)^p$ also sicher einen Faktor u^p. Wir können dieses Produkt also als ein neues Polynom schreiben, das immer noch ganzzahlige Koeffizienten hat; der kleinstmögliche Exponent ist aber nun u^p:

$$R(u) = r_{np+p-}\ u^{np+p-} \ + \cdots + r_p u^p.$$

Es folgt, dass für alle q zwischen 1 und n gilt

$$M_{pq} = \frac{1}{(p-1)!}\int_0^\infty (r_{np+p-}\ u^{np+p-} \ + \cdots + r_p u^p) \cdot e^{-u}du$$
$$= \frac{1}{(p-1)!}\big(r_{np+p-} \ \cdot (np+p-1)! + \cdots + r_p \cdot p!\big)$$
$$= r_{np+p-1} \cdot \frac{(np+p-1)!}{(p-1)!} + \cdots + r_p \cdot \frac{p!}{(p-1)!}$$

In dieser Summe sind wieder alle Summanden ganze Zahlen: nun sind aber alle Summanden durch p teilbar, auch der letzte. Also ist für alle q zwischen 1 und n jeweils M_{pq} eine ganze Zahl, die durch p teilbar ist. (III)

Schließlich bemerken wir noch, dass für jede natürliche Zahl k zwischen 0 und n folgt:

$$\varepsilon_{pk} + M_{pk} = e^k \cdot \int_0^k F(x)dx + e^k \cdot \int_k^\infty F(x)dx = e^k \cdot \int_0^\infty F(x)dx = e^k \cdot M_{p0} \ \ (IV).$$

Damit sind nun endlich alle Vorarbeiten erledigt. Nun verwenden wir endlich die oben gemachte Annahme: e lost die Polynomgleichung, es gilt also

$$a_n e^n + a_{n-1}e^{n-1} + \cdots + a_0 = 0.$$

Diese Gleichung multiplizieren wir mit M_{p0},

$$a_n \cdot e^n \cdot M_{p0} + a_{n-1} \cdot e^{n-1} \cdot M_{p0} + \cdots + a_0 \cdot e^0 \cdot M_{p0} = 0$$

und verwenden dann das Ergebnis (IV), von rechts nach links gelesen, für alle Werte k zwischen 0 und n:

$$a_n \cdot \left(\varepsilon_{pk} + M_{pk}\right) + a_{n-1} \cdot e^{n-1} \cdot \left(\varepsilon_{pn-1} + M_{pn-1}\right) + \cdots + a_0 \cdot \left(\varepsilon_{p0} + M_{p1}\right) = 0.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} a_n \cdot \varepsilon_{pn} + a_{n-1} \cdot \varepsilon_{pn-1} + \cdots + a_1 \cdot \varepsilon_{p1} + a_0 \cdot \varepsilon_{p0} \\ = -a_n \cdot M_{pn} - a_{n-1} \cdot M_{pn-1} - \cdots - a_1 \cdot M_{p1} - a_0 \cdot M_{p0}. \end{aligned}$$

Auf der rechten Seite stehen nun nur ganze Zahlen, also muss auch die linke Seite eine ganze Zahl sein. Aus (I) wissen wir aber, dass der Betrag der linken Seite $\leq \frac{1}{2}$ sein muss; die einzige ganze Zahl, für die das gilt, ist natürlich die Null. Also folgt

$$-a_n \cdot M_{pn} - a_{n-1} \cdot M_{pn-1} - \cdots - a_1 \cdot M_{p1} - a_0 \cdot M_{p0} = 0.$$

Nun hatten wir oben aber gezeigt, dass zwar für n zwischen 1 und n alle M_{pn} durch p teilbar sind, aber M_{p0} eben nicht durch p teilbar ist (II und III). Es folgt, dass die komplette linke Seite nicht durch p teilbar sein kann (die Koeffizienten a_j sind wegen der Voraussetzung $p > 2 \cdot (n+1) \cdot \max\left|a_j\right|$ ja auch nicht durch p teilbar). Das ist aber ein offensichtlicher Widerspruch dazu, dass die Summe insgesamt 0 ergeben soll, denn 0 ist ja offensichtlich durch p teilbar. Damit sind wir fertig – wir haben mit der Annahme angefangen, dass e Lösung einer Polynomgleichung mit ganzzahligen Koeffizienten ist und gezeigt, dass man aus dieser Annahme schließlich ein widersprüchliches Ergebnis erhält. Also muss die Annahme falsch sein, es gibt also keine solche Polynomgleichung. Und damit ist die Euler’sche Zahl transzendent.

[1] Eli Maor: ,,e – the story of a number'' (1994)

[2] Thomas Sonar: ,,3000 Jahre Analysis'' (2012)

[3] Erwin Voellmy: ,,Jost Bürgi und die Logarithmen'',

Beihefte zur Zeitschrift ,,Elemente der Mathematik'', Nr. 5 (1948)

voellmy.pdf

[4] J. W. L. Glaisher: ,,The earliest use of the radix method in calculating logarithms…''

The Quarterly Journal of pure and applied mathematics, Vol. XLVI (1914?), pp. 140-146

[5] Margaret E. Baron: ,,The Origins of the Infinitesimal Calculus'' (1969)

[6] C. H. Edwards: ,,The historical development of the calculus'' (1979)

[7a] James Gregory: ,,Vera circuli et hyperbolae quadratura'' (1667)

online: https://archive.org/details/ita-bnc-mag-00001357-001

[7b] ,,Exercitationes geometricae'' (1668)

online: https://books.google.de/books?id=ZtRYqgyD5YsC&printsec=frontcover&redir_esc=y#v=onepage&q&f=false

[8] Horst Hirscher: ,,James Gregory und ,,Konvergenz'' – auf den Spuren zu seinem Algorithmus'',

Preprint Nr. 379, Universität des Saarlandes, Fachrichtung 6.1 – Mathematik (2016)

online: https://www.math.uni-sb.de/preprints/preprint379.pdf

[9] R. P. Burn: ,,Alphonse Antonio de Sarasa and Logarithms'',

Historia Mathematica 28 (2001),

online u.a. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S031508600092295X?via%3Dihub

Burn_on_Sarasa.pdf

Grégorie de Saint-Vincent: ,,Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni, Tomus secundus'' (1647)

online: https://bvpb.mcu.es/es/consulta/registro.cmd?id=406787

Alphonse Antonio de Sarasa: ,,Solutio problematis a R.P.Marino Mersenno Minimo propositi'' (1649)

[10] Pietro Mengoli: ,,Geometriae speciosae elementa'' (1659);

online: https://books.google.de/books?id=GZo_AAAAcAAJ&printsec=frontcover&redir_esc=y#v=onepage&q&f=false

[11] William Brouncker: ,,The squaring of the hyperbola, by an infinite series of rational numbers, …''

Philosophical Transactions of the Royal Society, Nr. 34 (1668),

online: https://royalsocietypublishing.org/doi/pdf/10.1098/rstl.1668.0009

zur Geschichte siehe https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Brouncker/

[12] Thomas Sonar: ,,Die Geschichte des Prioritätsstreits zwischen Leibniz und Newton'' (2016)

[13] Isaac Newton: ,,De analysi per aequationes numero terminorum in nitas'' (1669);

online: https://www.newtonproject.ox.ac.uk/view/texts/normalized/NATP00204

Manuskript von 1665: online https://cudl.lib.cam.ac.uk/view/MS-ADD-03958/149 bis

https://cudl.lib.cam.ac.uk/view/MS-ADD-03958/152

[14a] Nicolaus Mercator: ,,Logarithmotechnia'' (1668)

[14b] Philosophical Transactions of the Royal Society, Volume 3, Issue 38 (17.8.1668)

online: https://royalsocietypublishing.org/doi/pdf/10.1098/rstl.1668.0034

[15] https://leibniz.uni-goettingen.de/files/pdf/Leibniz-Edition-III-5.pdf

[16] Jakob Bernoulli: ,,Quaestiones nonnullae de usuris'',

Acta Eruditorum (Mai 1690), S. 219-222

[17] Wilhelm Sternemann: ,,Die stetige Verzinsung bei Jakob Bernoulli'',

Mathematischer Semesterbericht (2015), S. 159-172

stetigeVerzinsung_Bernoulli.pdf

[18] Derek Thomas Whiteside: ,,Patterns of Mathematical Thought in the later Seventeenth Century''

Archive for History of Exact Sciences volume 1 (1961), pp. 230-231

Whiteside.pdf

[19] Edmond Halley: ,,A most compendious and facile Method for Constructing the Logarithms, exemplified and demonstrated from the Nature of Numbers, without any regard to the Hyperbola, with a speedy Method for finding the Number from the Logarithm given'',

PT 19 (1695) No. 215, pp. 58

Halley.pdf

[20] Leonhard Euler: ,,Meditatio in experimenta explosione tormentorum nuper instituta''

(1727 oder 1728 bzw. 1862);

online: https://scholarlycommons.pacific.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1852&context=euler-works

Brief an Goldbach (1731),

online: http://eulerarchive.maa.org//correspondence/letters/OO0729.pdf (S. 58)

,,Mechanica sive motus scientia analytice exposita‘‘ (1736)

,,Introductio in Analysin Infinitorum‘‘ (1748), deutsch: Einleitung in die Analysis des Unendlichen. Erster Teil. (1983; Reprint der Ausgabe Berlin 1885). S. 91

[21] Stefan Krauss: ,,Die Entdeckungsgeschichte und die Ausnahmestellung einer besonderen Zahl‘‘ The Teaching of Mathematics, 1999, Vol.II, 2, S. 105–118
online: http://elib.mi.sanu.ac.rs/files/journals/tm/3/tm223.pdf

[22a] Wikipedia: https://de.wikipedia.org/wiki/Eulersche_Zahl

[22b] https://de.wikipedia.org/wiki/Beweis_der_Irrationalit%C3%A4t_der_eulerschen_Zahl

[22c] https://de.wikibooks.org/wiki/Beweisarchiv:_Algebra:_K%C3%B6rper:_Zahlencharakter_von_e

[23a] Joseph Ehrenfried Hofmann: ,,Geschichte der Mathematik‘‘, Band 2, De Gruyter 1957
online: https://www.degruyter.com/document/doi/10.1515/9783111364940/html
(Hofmann_GeschichteMathematii_2.pdf)

[23b] ,,On the Discovery of the Logarithmic Series and Its Development in England up to Cotes‘‘, National Mathematics Magazine , Oct., 1939, Vol. 14, No. 1 (Oct., 1939), pp. 37-45
online: https://www.jstor.org/stable/3028095
(Hofmann_1939.pdf)

[23c] ,,Mutmaßungen über ein derzeit verschollenes Manuskript von Hudde‘‘, Nova acta Leopoldina, neue Folge, Band 30 (1965) Nr. 1

[24] Rienk Vermij: ,,Bijdrage tot de bio-bibliografie van Johannes Hudde‘‘
GEWINA / TGGNWT, volume 18, issue 1, pp. 25 – 35 (2012)
online: https://dspace.library.uu.nl/handle/1874/251283
Biobibliographie_Hudde.pdf

[25] Abraham de Moivre: ,,A Method of extracting the Root of an Infinite Equation‘‘, Phil. Trans. 20 (1698) pp. 190-192 (1698)
online: https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rstl.1698.0034

[26] Roger Cotes: ,,Logometria‘‘, Phil. Trans. 29 (1714)
online: https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rstl.1714.0002
Cotes.pdf

[27] Augustin-Louis Cauchy: ,,Cours d’Analyse‘‘ (1821)
deutsche Übersetzung: C. L. B. Huzler, ,,Lehrbuch der Algebraischen Analysis‘‘. Königsberg (1828)

Cauchy.pdf

[28] Ed Sandifer: ,,How Euler did it, Who proved e is irrational?‘‘

MAA online, Februar 2006

online: http://eulerarchive.maa.org/hedi/HEDI-2006-02.pdf

[29] Charles Hermite: ,,Sur la function exponentielle‘‘

Comptes rendus de l’Académie des Sciences 77, S. 18-24, 74-79, 226-233 und 285-293. (1873)

Zusammenfassung aller dieser Teile (?) online:

https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN577122851?tify=%7B%22view%22:%22info%22,%22pages%22:%5B1%5D%7D

[30] John Napier: ,, Mirifici logarithmorum canonis descriptio‘‘, 1614

online: https://www.digitale-sammlungen.de/de/view/bsb11110567

[31} Michael Raugh, Siegmund Probst; ,,The Leibniz catenary and approximation of *e* — an analysis of his unpublished calculations‘‘, Historia Mathematica 49, S. 1 (2019)

online: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0315086018301290

[32] Michael Raugh: ,,Leibniz used Calculus to solve the Catenary Problem: But he presented it as a Euclidean Construction without Explanation‘‘, Vortrag im Rahmen des ,,Research in Industrial Projects for Students‘‘-Programms am Institute for Pure & Applied Mathematics, University of California, Los Angeles (2017)

online: https://www.mikeraugh.org/Talks/RIPS-2017-LeibnizCatenary.pdf

[33] Leibniz, Sämtliche Schriften und Briefe, Reihe III, Band 1

[34] Joseph Ehrenfried Hofmann (1957): Über Leibnizens früheste Methode zur Reihenentwicklung – Leopoldina - Mitteilungen der deutschen Akademie der Naturforscher Leopoldina – 3_1957: 67 – 72

[35] Leibniz, Sämtliche Schriften und Briefe, Reihe VII, Band 6