Kapitel 1: Die Anfänge

antikes Griechenland: geometrische Konstruktion von Tangenten an Parabeln, Ellipsen, Hyperbeln

Archimedes (etwa 287-212 v. Chr.): geometrische Konstruktion von Tangenten an die „archimedische‘‘ Spirale

Pierre de Fermat (1607?-1665): formulierte wohl (in den 1620er Jahren) als erster den Gedanken, dass sich bei einem Extremum eine Größe kaum verändert, wenn man die abhängige Variable verändert; redete von der „Pseudogleichheitsmethode‘‘: analog zu Leibniz‘ und Newtons späteren Methoden betrachtete er Änderungen (bezeichnet mit E), die als praktisch gleich 0 betrachtet wurden (ähnlich zur h-Methode!) und berechnete damit dann auch Tangenten(steigungen). Allerdings veröffentlichte er diese Arbeiten anscheinend nie; zumindest in Briefen an Descartes verwendete er die Methode aber, auch für implizite Funktionen mit f(x,y) = 0. Seine Arbeiten sind noch fast ausschließlich im alten griechischen geometrischen Stil formuliert und verwenden kaum moderne algebraische Schreibweisen, deshalb sind sie für heutige Verhältnisse reichlich unverständlich (außerdem formulierte er vieles so undurchsichtig, dass auch seine damaligen Zeitgenossen große Verständnisprobleme hatten…)

Für eine ausführlichere Darstellung der Methoden von Descartes und Fermat siehe z. B. dieses Video:
https://www.youtube.com/watch?v=xKfEmbWBgvM

Jean de Beaugrand (1584-1640): vereinfachte Fermats Methode und stellte sie klarer dar; verwendete statt des E bei Fermat das Zeichen o (wohl um anzudeuten, dass diese Größe letztlich gleich 0 gesetzt werden soll); das übernahm dann höchstwahrscheinlich James Gregory von ihm, Newton dagegen kam wohl unabhängig davon auf denselben Buchstaben

René Descartes (1596-1650), 1637: ermittelte jeweils einen Kreis mit Mittelpunkt auf der x-Achse, der den Graphen eines Polynoms berührt (doppelte Schnittstelle); damit erhielt er dann die Steigung der Normale (Radius des Kreises steht senkrecht auf dem Berührpunkt) und daraus dann die Steigung der Tangente

Evangelista Torricelli (1608-1647): fand erstmals (veröffentlicht 1644) einen Zusammenhang zwischen Flächenberechnungen und dem Finden von Tangenten an Kurven (vgl. den Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung in Klasse 12!), auch ähnliche Ideen wie Roberval (s. u.)

Gilles Personne de Roberval (1602-1675): Stellte sich (in den 1630er und 1640er Jahren) vor, dass eine Kurve durch eine Bewegung eines Punktes entsteht; die Steigung der Tangente an einem Punkt der Kurve ergibt sich dann als Quotient der Momentangeschwindigkeiten in y- und in x-Richtung. Die entsprechenden Geschwindigkeiten erhielt er, indem er sich die Bewegung zusammengesetzt aus einfacheren Bewegungen dachte; dies ergibt z. B. für die Zykloide die richtigen Momentangeschwindigkeiten und Tangentensteigungen, bei z. B. der Ellipse und der Parabel stimmen die Geschwindigkeiten zwar nicht, die Tangentensteigungen erhielt er aber trotzdem richtig.

René Francois Walther de Sluse (1622-1685), um 1655 (veröffentlicht erst 1673, in einem Brief an die Royal Society; Leibniz war bei der Verlesung anwesend, wurde also wahrscheinlich dadurch inspiriert!): allgemeines Verfahren für Bestimmung der Tangente an eine Kurve, die durch ein Polynom in den zwei Variablen x, y beschrieben wird, dabei weitgehend Verwendung modernerer algebraischer Schreibweisen. Gab aber keine Begründung für das Verfahren. (Baute evtl. auf Hudde auf oder auch auf Fermat?) Formulierte damit im

Wesentlichen die Potenzregel $(x^n)' = n\ x^{n-1}$ für natürliche Exponenten, außerdem die Summen- und Faktorregel, allerdings alle drei gemeinsam in einer relativen komplexen Formel.

Johann van Waveren Hudde (1628-1704): Methode, um doppelte Nullstellen von Polynomen zu finden (und damit Vereinfachung der Methode von Descartes!): „Hudde-Regel" (entwickelt um 1657, veröffentlicht 1659), verwendet im Wesentlichen, dass man, wenn man die Monome eines Polynoms f(x) der Reihe nach mit Termen der Form $p + j\ q$ multipliziert und summiert, $p\ f(x) + q\ x\ f'(x)$ erhält (d. h. implizit wird $(x^n)' = n\ x^{n-1}$ verwendet); erweiterte die Methode auch für gebrochenrationale Funktionen

Christiaan Huyghens (1629-1695): bestimmte durch zweifache Anwendung von Fermats Methode erstmals Wendepunkte; wandelte die Methode auch ab zur Behandlung von dreifachen Lösungen; wendete die „Hudde-Regel" schon 1658 an und behauptete, er hätte sie bereits vor Hudde gefunden

Kapitel 2: Erste Zusammenstellungen, allgemeingültige Formulierungen und Verfahren

James Gregory (1638-1675): „Geometriae pars universalis‘‘, 1668: Erste systematische Zusammenstellung und Vereinheitlichung der bekannten Methoden, erste allgemeine Beweise – aber fast alles im alten griechischen geometrischen Stil formuliert und damit für heutige Verhältnisse reichlich unverständlich; erste deutliche Darstellung des Zusammenhangs zwischen der Bestimmung von Tangenten und der Berechnung von Flächeninhalten unter Kurven (vgl. den Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung in Klasse 12!); algebraische Tangentenbestimmung mit einer Methode analog zur Fermats, aber Zeichen o verwendet statt Fermats E (wahrscheinlich hatte er das von Beaugrand, s. o.)

Isaac Barrow (1630-1677): „Lectiones geometricae‘‘ (stammen wahrscheinlich von 1664-65, veröffentlicht aber erst 1670): Kurven entstehen als Bahnen von sich bewegenden Punkten bzw. als Schnittpunkte von zwei sich bewegender Linien, die rechtwinklig zueinander stehen; Zeit besteht aus unendlich kleinen „timelets‘‘, Raum aus unendlich kleinen „linelets‘‘ (oder auch: „Momente, die kontinuierlich fließen‘‘); Steigung einer Tangente ergibt sich als Quotient der Geschwindigkeiten der beiden zueinander rechtwinkligen Bewegungen; erkannte auch den Zusammenhang zwischen der Bestimmung von Tangenten und der Berechnung von Flächeninhalten unter Kurven (vgl. den Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung in Klasse 12!), stellte ihn aber nicht so klar dar wie Gregory; verwendete wie Gregory hauptsächlich die alte griechische geometrische Darstellung, ging aber sowohl bei den fundamentalen Begründungen als auch bei den Anwendungen weiter als jener; zusätzlich auch algebraische Tangentenberechnung ähnlich wie bei Fermat für implizite Funktionen mit f(x,y) = 0; höhere Potenzen der Infinitesimalen wurden gleich 0 gesetzt, „for these terms have no value‘‘.

Sir Isaac Newton (1643-1727), 20.5.1665: erste Verwendung des Punktes für eine Geschwindigkeit bzw. ein „Fluxion‘‘ in einem Manuskript (in den folgenden Jahrzehnten aber nicht konsequent durchgehalten, sondern immer wieder andere Notationen verwendet!); November 1665: Manuskript „Methode der Fluxionen‘‘, Oktober: unveröffentlichte Zusammenfassung („Oktobertraktat‘‘) der Arbeiten zur Fluxionenrechnung, einigen Mathematikern Englands Kopien zur Verfügung gestellt; Manuskript „De Analysi per Aequationes Numero Terminorum Infinitas‘‘ („Über die Analysis mit Gleichungen, die in der Anzahl ihrer Terme unbegrenzt sind‘‘) 1669 an Sekretär der Royal Society ausgeliehen, aber erst 1711 veröffentlicht (Anwendungen der Fluxionenrechnung allerdings bereits 1693 im Lehrbuch „De algebra tractatus‘‘ von John Wallis und 1704 in Newtons Veröffentlichung „Quadratura curvarum‘‘)

Berechnung von Tangenten an Graphen von impliziten Funktionen f(x,y) = 0, indem die Kurve bestehend aus Schnittpunkten zweier sich in x- und y-Richtung bewegender Linien gedacht wird (vgl. Barrow!), dabei Bezeichnungen „Fluenten‘‘ x und y und für die Geschwindigkeiten „Fluxionen‘‘ (sicher inspiriert von Barrows „fließenden Momenten‘‘!) $\dot{x}$ und $\dot{y}$ (anfangs p und q), Tangentensteigung dann $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$. Er betrachtete somit wohl als erster konkrete physikalische Anwendungen im Sinne von Änderungsraten! (vgl. allerdings Barrows „timelets‘‘)

in Oktobertraktat: für Polynome f(x,y) = 0: ersetze x bzw. y durch x + o$\dot{x}$ bzw. y + o$\dot{y}$ (wobei o ein infinitesimales Zeitintervall ist, das entspricht im Wesentlichen dem h in der h-Methode; Newton schrieb laut des oben erwähnten Videos, dass er bei der Entwicklung dieser Methode direkt von Fermat beeinflusst wurde!), wende auf jede Potenz das Binomialtheorem an, vernachlässige höhere Potenzen in o („because they are infinitely less than those in which o is but of one dimension‘‘) und verwende f(x,y) = 0, dann Division durch o, führt letztlich auf Regel: multipliziere jeden Summanden mit $\dot{x}$/x und der jeweiligen Potenz von x, dann multipliziere jeden Summanden mit $\dot{y}$/y und der jeweiligen Potenz von y, addiere beide Summen und setze dies gleich 0 (letztlich vereinfachte Version der Hudde-Regel; enthält implizit die Summen-, Faktor- und Potenzregel!) ➔ Beziehung zwischen $\dot{x}$ und $\dot{y}$, also letztlich Steigung auch schon Ableitungen mittels einer Art Kettenregel (Substitutionen intensiv verwendet), Produktregel, Quotientenregel

in „De Analysi…‘‘: das heute so benannte „Newton-Verfahren‘‘ zum näherungsweise Lösen von Gleichungen mithilfe von Ableitungen entwickelt (allerdings nicht, wie heute üblich, geometrisch mittels Tangenten interpretiert!)

in 1671 veröffentlichter Abhandlung: Ableitungsregeln verwendet, um erstmals auch eine große Tabelle mit „Aufleitungen‘‘ (Stammfunktionen, siehe Klasse 12) aufzustellen.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), 1673: mit „charakteristischem Dreieck‘‘ viele Sätze bewiesen, u.a. ein Beweis der Ableitung von x^n mithilfe der Subnormalen, aber noch in sehr umständlicher Schreibweise; Erkenntnis, dass das Bestimmen von Tangenten letztlich auf die Berechnung von „unvergleichlich kleinen‘‘ Differenzen hinaus läuft

Ende 1673 / Anfang 1674: „Transmutationstheorem‘‘, das die Bestimmung von Flächen unter Kurven (unter anderem) auf die Bestimmung von Tangentensteigungen zurück führt

29.10.1675: zunächst Schreibweise y/d für das, was einige Tage später zu dy wird, dabei schon betont, dass das d für „Differenz‘‘ steht

11.11.1675: Schreibweise mit Differenzialen dx, dy eingeführt, allerdings noch nicht direkt im Zusammenhang mit Differenzialrechnung, sondern erst mal nur als „unendlich kleine‘‘ Differenzen; untersuchte hier allerdings schon, ob d(xy) = dx dy und d(x/y) = dx/dy ist

November 1676: Verwendung der Differenziale für Ableitungen, z. B. $dx^n = n\,x^{n-1}\,dx$ geschrieben (das dx entspricht hier im Wesentlichen dem h in der h-Methode); Kettenregel verwendet; Sluses Verfahren mit seiner eigenen Methode hergeleitet

11.7.1677: Produkt- und Quotientenregel für d(xy) bzw. d(y/x) angegeben und bewiesen (mittels Argumentation, dass das Produkt zweier Differenziale „unendlich klein‘‘ ist, verglichen mit den restlichen Termen, bzw. dass im Nenner dx „unendlich klein‘‘ ist, verglichen mit x^2); Kurven werden als Vielecke mit mit unendlich vielen Winkeln und unendlich kurzen Seiten betrachtet

1684: erste Veröffentlichung seiner Methoden in der mathematischen Fachzeitschrift „Acta Eruditorum‘‘, darin auch die Aussage, dass eine Tangente an eine Kurve zwei Punkte der Kurve in „unendlich kleinem Abstand voneinander‘‘ verbindet; dy > 0 für Zunahme, dy < 0 für Abnahme, dy = 0 für „stationäre‘‘ Punkte (also Maximum oder Minimum), Bedingung d(dy) = 0 für Wendepunkt

Kapitel 3: Entwicklung der heutigen Definition und Schreibweise

Joseph-Louis Lagrange (1736-1823), 1797: Lehrbuch, basierend auf seiner Vorlesung, „Théorie des fonctions analytiques‘‘ (also: Theorie der analytischen Funktionen), darin Schreibweise f‘x, f‘‘x, … für Ableitungen eingeführt und Bezeichnung „abgeleitete Funktion‘‘

Augustin Louis Cauchy (1789-1857), 1821: Lehrbuch „Cours d’analyse‘‘ (also: Kurs zur Analysis) basierend auf seinen Vorlesungen: moderne Definition der Ableitungsfunktion, einschließlich Begriff „abgeleitete (derivierte) Funktion‘‘, Bezeichnung y‘ oder f ‘

Karl Weierstraß (1815-1897): um 1863 (veröffentlicht erst 1872): Differenzierbarkeit folgt aus Stetigkeit, aber nicht umgekehrt; Beispiel einer Funktion, die überall stetig, aber nirgends differenzierbar ist

Kapitel 4: Modernere Entwicklungen

Èlie Joseph Cartan (1869-1951), 1899: „expression différentielle‘‘ definiert (im Wesentlichen die heutigen sogenannten „alternierenden Differenzialformen‘‘); 1922: Begriffe „exterior differential form‘‘ (äußere Differenzialform) und „exterior derivative‘‘ (äußere Ableitung)

Erich Kähler (1906-2000), in seinem Buch „Einführung in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen‘‘ 1934: Notation d für äußere Ableitung von Differenzialformen eingeführt

Sergej L'vovic Sobolew (1908-1989), in 1930er Jahren: Sobolew-Funktionenräume mit „schwach differenzierbaren‘‘ Funktionen

Laurent Schwartz (1915-2002), nach dem 2. Weltkrieg: Distributionen

Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984): Delta-Distribution

ab ca. 1940: „Nichtstandardanalysis‘‘ (u. a. **Detlef Langwitz (1932-2000), Curt Schmieden (1905-1991), Abraham Robinson (1918-1974), Edward Nelson (1932-2014)**): Versuch einer Definition des Begriffs „unendlich kleine Zahl‘‘, damit ist dann Differenzialrechnung ohne Verwendung von Grenzwerten möglich

Quellen

Thomas Sonar: „3000 Jahre Analysis‘‘ (2. Auflage), Springer-Verlag, 2016

und „Die Geschichte des Prioritätsstreits zwischen Leibniz und Newton‘‘, Springer-Verlag, 2016

Margaret E. Baron: „The Origins of the Infinitesimal Calculus‘‘, Pergamon Press, 1969

C. H. Edwards Jr.: „The Historical Development of the Calculus‘‘, Springer-Verlag, 1937

Florian Cajori: „A History of Mathematical Notations‘‘, Dover Publications, unveränderte Neuauflage 2012 (ursprünglich 1928/29)

Florian Cajori: „Who was the first inventor of the calculus?‘‘, The American Mathematical Monthly 26, 1919 (online: https://archive.org/details/jstor-2974042/page/n3/mode/2up)

Pierre de Fermat: Varia opera mathematica, 1679, S. 63f

(online: https://books.google.at/books?id=6hYOAAAAQAAJ&pg=PA63#v=onepage&q&f=false)