Für alle Punkte X auf der Geraden gilt:

$$(\vec{x}-\vec{a})||\vec{u},$$

also folgt

$$\boxed{(\vec{x}-\vec{a})\times\vec{u}=\vec{0}.}$$

Dies könnte man als die „Richtungsvektor-Form" der Gerade bezeichnen.

Ausmultiplizieren führt dann auf das Gleichungssystem

$$\boxed{\begin{aligned}(x_2-a_2)u_3-(x_3-a_3)u_2=0 \quad \text{I}\\(x_2-a_2)u_3-(x_3-a_3)u_2=0 \quad \text{II}\\(x_2-a_2)u_3-(x_3-a_3)u_2=0 \quad \text{III}\end{aligned}}$$

Dies könnte man als die Koordinaten-Form der Gerade bezeichnen. Dies sieht spontan nach drei voneinander unabhängigen Gleichungen aus, in Wirklichkeit sind es aber nur zwei unabhängige. Wenn alle Komponenten u_1, u_2, u_3 des Richtungs-vektors ungleich 0 sind, kann man dies nämlich noch vereinfachen zu

$$\boxed{\frac{x_1-a_1}{u_1}=\frac{x_2-a_2}{u_2}=\frac{x_3-a_3}{u_3}.}$$

Wenn zumindest zwei Komponenten ungleich 0 sind, z. B. u_2, u_3, aber $u_1=0$, so folgt

$$x_1=a_1; \quad \frac{x_2-a_2}{u_2}=\frac{x_3-a_3}{u_3};$$

wenn nur eine Komponente ungleich 0 ist, z. B. u_3, aber $u_1=u_2=0$, so folgt

$$x_1=a_1; \quad x_2=a_2; \quad x_3\in\mathbb{R}.$$

Alternativ kann man die Richtung einer Gerade auch dadurch beschreiben, dass man *zwei* (nicht parallele) Vektoren $\vec{m}, \vec{n}$ angibt, die senkrecht zu ihr stehen; die Normalenform der Geradengleichung lautet also

$$\boxed{(\vec{x}-\vec{a})\times\vec{m}=0 \text{ und } (\vec{x}-\vec{a})\times\vec{n}=0.}$$

Multipliziert man wie bei einer Ebene die Klammern aus, so erhält man eine alternative Koordinaten-Form der Gerade,

$$\boxed{\begin{aligned}(x_1-a_1)m_1+(x_2-a_2)m_2+(x_3-a_3)m_3=0 \quad \text{IV}\\(x_1-a_1)n_1+(x_2-a_2)n_2+(x_3-a_3)n_3=0 \quad \text{V}\end{aligned}}$$

Auch wenn man das nicht auf den ersten Blick sieht – die beiden Koordinatenformen sind völlig äquivalent zueinander! Denn berechnet man z. B. $n_1\cdot IV-m_1\cdot V$, so erhält man die Gleichung

$$(x_2-a_2)(n_1m_2-n_2m_1)+(x_3-a_3)(n_1m_3-n_3m_1)=0.$$

Da $\vec{m}, \vec{n}$ beide senkrecht zur Geraden stehen, ist aber $\vec{n}\times\vec{m}$ parallel zu ihr, es gibt also ein $k\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$, sodass

$$\vec{n}\times\vec{m}=k\,\vec{u}$$

ist. Dann folgt $n_1m_2-n_2m_1=k\,u_3$ und $n_1m_3-n_3m_1=-k\,u_2$ und damit die Gleichung

$$(x_2-a_2)\,k\,u_3-(x_3-a_3)\,k\,u_2=0.$$

Teilt man noch durch $k\neq0$, so erhält man also wieder Gleichung I. Genauso zeigt man, dass auch Gleichungen II und III aus den Gleichungen IV und V folgen, und indem man die Schritte umgekehrt, kann man auch zeigen, dass Gleichungen IV und V aus den Gleichungen I bis III folgen.