Das uneigentliche Integral über die Gauß'sche Glockenkurve

Gesucht ist der Wert des Integrals $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-0,5\,x^2} dx$.

Dafür schaut man sich das Quadrat dieses Integrals an:

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-0,5\,x^2} dx\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-0,5\,x^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-0,5\,x^2} dx\ .$$

Der Wert der beiden Integrale hängt natürlich nicht davon ab, wie die Integrationsvariable heißt, also kann man sie im zweiten Integral auch y nennen:

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-0,5\,x^2} dx\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-0,5\,x^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-0,5\,y^2} dy\ .$$

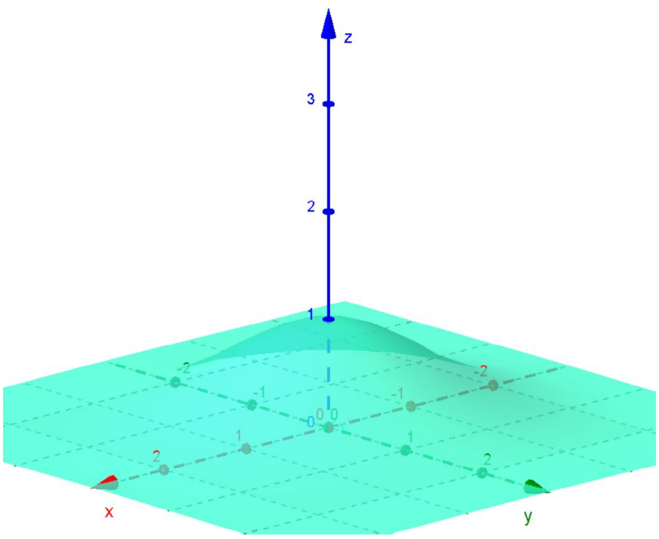
Ein Integral ist aber letztlich ja nichts anderes als der Grenzwert der Summe von Rechteckflächen, d. h. wir können schreiben

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-0,5\,x^2} dx\right)^2 = \lim_{m\to\infty} \sum_{i=0}^{n} e^{-0,5\,x_i^2} \cdot \Delta x \quad \cdot \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} e^{-0,5\,y_j^2} \cdot \Delta y$$

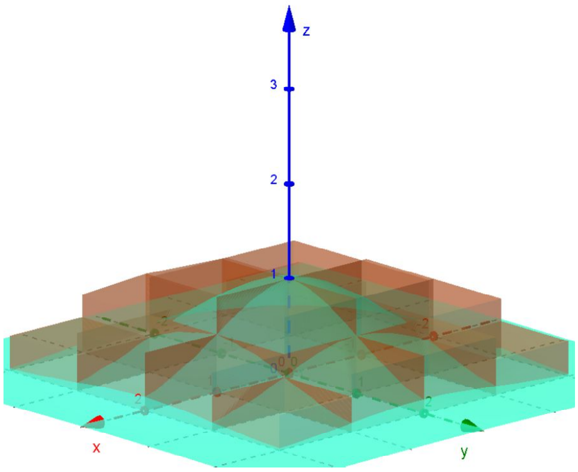
Die beiden Summen können wir dann ausmultiplizieren:

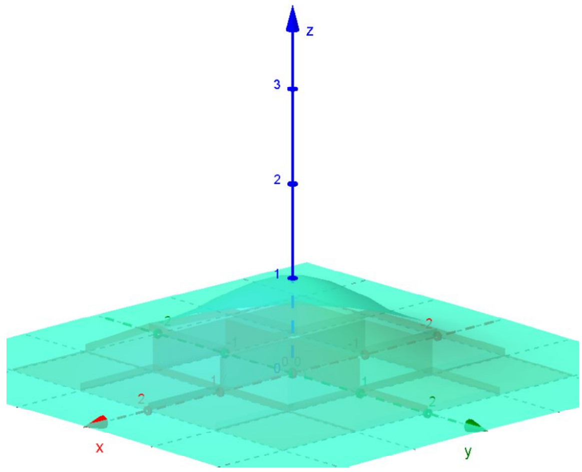
$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-0,5\,x^2} dx\right)^2 = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{n} e^{-0,5\,(x_i^2 + y_j^2)} \cdot \Delta x \cdot \Delta y$$

Die Funktion f(x,y) = $e^{-0,5\,(x^2+y^2)}$, die in der Doppelsumme auftaucht, hängt nun von zwei Variablen ab; ihr Graph ist deshalb keine Kurve mehr, sondern eine Fläche, und kann nur dreidimensional, mit einer dritten Achse (z-Achse) dargestellt werden:



Das Produkt $\Delta x \cdot \Delta y$ ist nun der Flächeninhalt eines Rechtecks in der x-y-Ebene, und das Produkt $e^{-0,5\,(x_i^2+\,y_j^2)} \cdot \Delta x \cdot \Delta y$ gibt deshalb das Volumen eines Quaders an. Die Doppelsumme ist also die Summe über alle Quader, die ober- bzw. unterhalb der Oberfläche liegen, die durch f beschrieben wird - man hat wieder eine Ober- und eine Untersumme:





Bildet man die Grenzwerte $m \to \infty$ und $n \to \infty$, so ergibt sich also das Volumen des Körpers, der begrenzt wird von der x-y-Ebene und der Oberfläche, die von f beschrieben wird:

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-0,5\,x^2}dx\right)^2 = V$$

Andererseits entsteht dieser Körper auch, wenn man den Graph von f(x) = $e^{-0,5\,x^2}$ um die z-Achse rotieren lässt - es ist ein Drehkörper! Das Volumen dieses Körpers kennen wir aber bereits aus Aufgabe 75, Seite 41: V = 2π.

Also ist

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-0,5\,x^2}dx\right)^2 = 2\pi$$

und damit

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-0,5\,x^2}dx = \sqrt{2\pi}\,.}$$