Das Gauß'sche Eliminationsverfahren

(und die Stufenform, und Matrizen, und Turbo-Gauß)

Manche linearen Gleichungssysteme mit drei Gleichungen und drei Unbekannten (3x3-LGS) sind sehr einfach zu lösen, zum Beispiel folgendes:

$$\begin{aligned} 2a + b - 2c &= -3 \quad \text{I} \\ -3b + c &= 6 \quad \text{II} \\ 3c &= 9 \quad \text{III} \end{aligned}$$

Offensichtlich erhält man zunächst: III ➔ $c = 3$
dann kann man einsetzen: in II ➔ $-3b + 3 = 6$ ➔ $b = -1$
und wieder einsetzen: in I ➔ $2a - 1 - 2\cdot 3 = -3$ ➔ $a = 2$

Solche Gleichungssysteme haben deshalb einen eigenen Namen:

Bei einem 3x3-LGS sagt man, dass es <u>Stufenform</u> (auch: <u>Dreiecksform</u>) hat, wenn eine Gleichung nur noch eine Variable und eine andere Gleichung nur noch dieselbe und eine weitere Variable enthält. Solche LGS lassen sich durch wiederholtes Einsetzen leicht lösen.

Um 3x3-LGS zu lösen, bringt man sie also am besten zunächst auf Stufenform! Der deutsche Mathematiker (einer der produktivsten überhaupt – und nebenher hat er auch noch Beiträge zur Astronomie, Geodäsie und Physik geleistet!) *Johann Gauß* hat dafür im 19. Jahrhundert ein allgemeines Verfahren entwickelt, das sogenannte „Gauß'sche (Eliminations-)Verfahren'', auch Gauß-Algorithmus genannt.

Die Grundidee ist einfach: man eliminiert der Reihe nach Variablen („wirft sie raus'') und macht so aus einem 3x3-LGS erst mal ein 2x2-LGS und aus diesem dann ein 1x1-LGS, also eine einzelne lineare Gleichung mit einer Variablen. Das kann man prinzipiell mit allen drei bekannten Verfahren machen (Einsetzungs-, Gleichsetzungs- und Additionsverfahren), am übersichtlichsten ist aber das Additionsverfahren.

<u>Gauß-Verfahren:</u> (für 3x3-LGS)
Ersetze immer wieder eine Gleichung durch ein Vielfaches ihrer selbst oder durch die Summe / Differenz aus dieser und einer anderen Gleichung (vgl. Additionsverfahren!). Ziel:

1) Zunächst in einer beliebigen Gleichung eine beliebige Variable eliminieren.
2) Dann <u>in einer anderen Gleichung</u> <u>*dieselbe*</u> *(!!!)* Variable eliminieren.
3) Dann <u>in einer dieser beiden Gleichungen</u> (!!!) auch noch eine zweite Variable eliminieren.

Das LGS ist dann in Stufenform und kann durch wiederholtes Einsetzen gelöst werden.

ausführliches Beispiel:

$$\begin{aligned} 2a + b - 2c &= -3 \quad \text{I} \\ -2a - 4b + 3c &= 9 \quad \text{II} \\ 4a - 4b + c &= 15 \quad \text{III} \end{aligned}$$

Zunächst können wir uns eine beliebige Variable und eine beliebige Gleichung aussuchen, aus der wir diese eliminieren (rauswerfen) wollen. Natürlich sucht man sich, weil man ja das Additionsverfahren verwenden will, am besten eine Variable heraus, bei der die Koeffizienten (Vorfaktoren) in zwei Gleichungen schon überein stimmen, also hier beispielsweise die Variable a: deren Vorfaktor ist in Gleichung I und Gleichung II schon jeweils 2 bzw. –2. Also ersetzen wir als ersten Schritt die Gleichung II durch I + II (statt dessen könnte man auch I durch I + II ersetzen !) und geben der geänderten Gleichung den neuen Namen II', den Rest lassen wir erst mal unverändert stehen:

$$\begin{aligned} 2a + b - 2c &= -3 \quad \text{I} \\ -3b + c &= 6 \quad \text{II'} = \text{I} + \text{II} \\ 4a - 4b + c &= 15 \quad \text{III} \end{aligned}$$

Im zweiten Schritt dürfen wir nicht mehr beliebig auswählen – wir ***müssen*** jetzt nochmal ***dieselbe*** Variable eliminieren wie im ersten Schritt (eine andere Variable rauszuwerfen wäre zwar nicht falsch, bringt uns aber schlichtweg nicht weiter!!!), wir müssen also jetzt noch in Gleichung I oder III auch das a eliminieren. In Gleichung I ist der Koffizient 2, in Gleichung III ist erst 4, also multiplizieren wir erst mal passend:

$$\begin{aligned} 4a + 2b - 4c &= -6 \quad \mathrm{I'} = 2\cdot \mathrm{I} \\ -3b + c &= 6 \quad \mathrm{II'} \\ 4a - 4b + c &= 15 \quad \mathrm{III} \end{aligned}$$

Jetzt sind die Koeffizienten gleich, und wir können das a eliminieren, indem wir die Gleichungen I' und III subtrahieren. Wir ersetzen also III durch I' – III (genauso gut könnten wir auch I' durch I' – III ersetzen, oder III durch III – I', oder I' durch III – I):

$$\begin{aligned} 4a + 2b - 4c &= -6 \quad \mathrm{I'} \\ -3b + c &= 6 \quad \mathrm{II'} \\ 6b - 5c &= -21 \quad \mathrm{III'} = \mathrm{I'} - \mathrm{III} \end{aligned}$$

Im dritten Schritt müssen wir nun noch in ***diesen beiden*** Gleichungen II' und III' eine weitere Variable eliminieren (mit Gleichung I' weiter zu rechnen wäre zwar nicht falsch, bringt uns aber schlichtweg nicht weiter!!!). Wieder können wir uns eine aussuchen (b oder c); wenn man sich die Koeffizienten anschaut, dann bietet sich wohl b an. Multipliziere also erst mal die zweite Gleichung passend:

$$\begin{aligned} 4a + 2b - 4c &= -6 \quad \mathrm{I'} \\ -6b + 2c &= 12 \quad \mathrm{II''} = 2\cdot \mathrm{II'} \\ 6b - 5c &= -21 \quad \mathrm{III'} = \mathrm{I'} - \mathrm{III} \end{aligned}$$

Dann kann durch Addition von II'' und III' die Variable b eliminiert werden. Wir ersetzen also III' durch II'' + III' (genauso gut könnten wir auch II' ersetzen):

$$\begin{aligned} 4a + 2b - 4c &= -6 \quad \mathrm{I'} \\ -6b + 2c &= 12 \quad \mathrm{II''} \\ -3c &= -9 \quad \mathrm{III''} = \mathrm{I''} + \mathrm{III'} \end{aligned}$$

Das LGS ist nun in Stufenform und kann einfach gelöst werden:
III'' ➔ $c = 3$
in II' ➔ $-6b + 2\cdot 3 = 12$ ➔ $b = -1$
in I' ➔ $4a + 2\cdot(-1) - 4\cdot 3 = -6$ ➔ $a = 2$

Das Verfahren erfordert natürlich erst mal relativ viel Schreibaufwand, weil man immer alle drei Gleichungen mit hinschreibt, auch die, die man gar nicht geändert hat (wer will, schreibt die nicht geänderten Gleichungen nicht noch mal mit hin – das spart Schreibaufwand, führt aber auch öfters zu Rechenfehlern!)

Ein wenig Zeit kann man sparen, wenn man das Multiplizieren und Addieren in jeweils einem Schritt erledigt, also jeweils eine Gleichung durch die Summe aus einem Vielfachem dieser und dem Vielfachen einer anderen Gleichung ersetzt (das nennt man dann auch eine „Linearkombination" – siehe Klasse 13!). Das Beispiel oben kann man also auch folgendermaßen kürzer rechnen (die einzelnen Schritte werden voneinander durch waagrechte Linien abgeteilt):

$$\begin{aligned} 2a + b - 2c &= -3 \quad \mathrm{I} \\ -2a - 4b + 3c &= 9 \quad \mathrm{II} \\ 4a - 4b + c &= 15 \quad \mathrm{III} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2a + b - 2c &= -3 \quad \mathrm{I} \\ -3b + c &= 6 \quad \mathrm{II'} = \mathrm{I} + \mathrm{II} \\ 6b - 5c &= -21 \quad \mathrm{III'} = 2\cdot \mathrm{I} - \mathrm{III} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2a + b - 2c &= -3 \quad \mathrm{I} \\ -3b + c &= 6 \quad \mathrm{II'} \\ -3c &= -9 \quad \mathrm{III''} = 2\cdot \mathrm{II'} + \mathrm{III'} \end{aligned}$$

Das LGS ist dann in Stufenform, und der Rest geht dann weiter wie oben.

Noch zwei Anmerkungen dazu:

1) Man kann auch Gleichungen und/oder die Reihenfolge der Variablen vertauschen, um dadurch das LGS übersichtlicher zu machen.
2) Entsprechend funktioniert das Gauß-Verfahren auch bei größeren LGS, z. B. bei 4x4-LGS: zuerst in drei Gleichungen eine Variable eliminieren, dann in zwei dieser drei Gleichungen eine zweite, dann in einer dieser beiden eine dritte.

Matrizen:

Das Gauß-Verfahren geht natürlich immer gleich, egal, wie die Variablen überhaupt heißen. Deswegen könnte man auf die Idee kommen, dass man die Variablen selbst eigentlich gar nicht hinschreiben muss – die Zahlen genügen für die Rechnung! Das klappt tatsächlich:

> Statt eines kompletten LGS kann man auch nur die Vorfaktoren der Variablen (Koeffizienten) und die konstanten Zahlen der rechten Seite als einen „Zahlenkasten" (Matrix, Mehrzahl: Matrizen) hinschreiben *(wo nichts steht: 0!)*. Das LGS kann dann wie bekannt mit dem Gauß-Algorithmus gelöst werden; hat man die Matrix auf Stufenform gebracht, geht man zu den Gleichungen selbst zurück.

Statt dem Beispiel-LGS oben kann man also einfach schreiben:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & -3 \\ -2 & -4 & 3 & 9 \\ 4 & -4 & 1 & 15 \end{array}\right)$$

Der senkrechte Strich steht an der Stelle, an der in den Gleichungen jeweils das Gleichzeichen steht. Links stehen die Koeffizienten (dieser Teil wird als **Koeffizientenmatrix** bezeichnet), rechts die konstanten Zahlen. Außen herum kommen Klammern, um anzudeuten, dass alles zusammen gehört (könnte man auch weglassen...). Insgesamt nennt man das die **erweiterte Koeffizientenmatrix**.

Das Lösen geht nun genauso wie oben; dem Eliminieren von Variablen entspricht nun, dass man jeweils Nullen erzeugen muss. Laut dem Gaußverfahren braucht man also erst mal zwei Nullen übereinander, dann in einer der beiden Zeilen noch eine zweite Null. Statt immer die römischen Zahlen hinzuschreiben, kann man aber auch einfach nur mit Pfeilen andeuten, was man jeweils rechnet (der Pfeil zeigt immer dahin, wohin man das Ergebnis schreibt):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & -3 \\ -2 & -4 & 3 & 9 \\ 4 & -4 & 1 & 15 \end{array}\right) \begin{array}{l} \quad + \quad \cdot 2 \\ \qquad\qquad - \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & 1 & 6 \\ 0 & 6 & -5 & -21 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot 2 \\ \quad + \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \end{array}\right)$$

Die dritte Zeile der Matrix entspricht nun aber einfach der Gleichung $-3c = -9$, also ergibt sich wieder $c = 3$. Die zweite der Zeile der Matrix entspricht der Gleichung $-3b + c = 6$, also $-3b + 3 = 6$, also $b = -1$. Und schließlich ergibt die erste Zeile $2a + b - 2c = -3$, also $4a + 2\cdot(-1) - 4\cdot 3 = -3$, also $a = 2$.

Anmerkungen:

1) Dem Vertauschen von Gleichungen entspricht nun ein Vertauschen von Zeilen der Matrix, dem Vertauschen der Reihenfolge der Variablen ein Vertauschen von Spalten. Bei letzterem muss man sich dann aber merken, welche Spalte zu welcher Variablen gehört!

2) Wem das immer noch zu viel Schreibaufwand ist: In den ersten beiden Schritten schreibt man die erste Zeile ja nur unverändert ab, im nächsten Schritt schreibt man sogar die ersten beiden Zeilen nur unverändert ab. Außerdem stehen vorne sowieso nur Nullen. Also kann man es sich eigentlich auch sparen, diese Zeilen und Spalten überhaupt hinzuschreiben – es genügt das Folgende:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & -3 \\ -2 & -4 & 3 & 9 \\ 4 & -4 & 1 & 15 \end{array}\right) \quad + \quad \cdot 2 \quad -$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -3 & 1 & 6 \\ 6 & -5 & -21 \end{array}\right) \quad \cdot 2 \quad +$$

$$\left(\begin{array}{c|c} -3 & -9 \end{array}\right)$$

Turbo-Gauß:

Das Gauß-Verfahren mit Matrizen kann weitgehend automatisiert werden, sodass man praktisch nichts mehr dabei denken muss. Weil das Verfahren dann auch sehr schnell geht, wird es hier an der Schule auch als „Turbo-Gauß'' oder „Gauß für Eilige'' bezeichnet (aber auch als „Schweinfurter Depperli-Verfahren''...)

Man muss dabei letztlich immer wieder nur vier Zahlen in einem Quadrat „über Kreuz multiplizieren'': die Zahl links oben mal die Zahl rechts unten, minus die Zahl rechts oben mal die Zahl links unten. Dabei benutzt man immer zwei Zahlen aus der ersten Spalte mit Zahlen aus den hinteren Spalten; das Ergebnis schreibt man jeweils rechts unten (!) hin. In die erste Spalte unten kommt jeweils (völlig automatisch) eine Null.

Das macht man zunächst mit der ersten und zweiten Zeile; im Beispiel von oben:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & -3 \\ -2 & -4 & 3 & 9 \\ 4 & -4 & 1 & 15 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} 2\cdot(-4) - 1\cdot(-2) = -6 \\ 2\cdot 3 - (-2)\cdot(-2) = 2 \\ 2\cdot 9 - (-3)\cdot(-2) = 12 \end{array} \qquad \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -6 & 2 & 12 \\ 4 & -4 & 1 & 15 \end{array}\right)$$

Die 0 vorne kommt am Schluss einfach automatisch hin!

Dann macht man mit der ersten und dritten Zeile genauso weiter; hier sind nur der erste Schritt und das Endergebnis gezeigt. Die 0 vorne kommt wieder automatisch hin!

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -6 & 2 & 12 \\ 4 & -4 & 1 & 15 \end{array}\right) \qquad 2\cdot(-4) - 1\cdot 4 = -12 \quad \ldots\ldots\ldots \qquad \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -6 & 2 & 12 \\ 0 & -12 & 10 & 42 \end{array}\right)$$

Dann macht man mit der zweiten und dritten Zeile weiter, fängt aber natürlich weiter hinten an; wieder ist nur das erste (von nun nur noch zwei) Kreuzchen und das Endergebnis gezeigt *(*die 0 vorne kommt wieder automatisch hin!*)*:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -6 & 2 & 12 \\ 0 & -12 & 10 & 42 \end{array}\right) \qquad (-6)\cdot 10 - 2\cdot(-12) = -36 \quad \ldots\ldots\ldots \qquad \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -6 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & -36 & -108 \end{array}\right)$$

Die Matrix ist nun also auf Stufenform (nachdem man nur acht Kreuzchen berechnet hat, ohne nachdenken zu müssen!), und das LGS kann wie bekannt fertig gelöst werden.

Vorsicht: Das Verfahren darf ***nicht*** angewendet werden, wenn vorne oben schon eine 0 steht!!! Abhilfe: einfach mit anderen Zeilen anfangen bzw. die Zeilen erst mal vertauschen. Außerdem kann man sich das Verfahren natürlich sparen, wenn vorne unten sowieso schon eine Null steht, die entsprechende Zeile kann man dann einfach abschreiben.

Anmerkungen:

1) Die Reihenfolge ist letztlich egal – man könnte z. B. auch mit der zweiten und dritten Zeile anfangen.

2) Auch hier kann man es sich eigentlich sparen, die unveränderten Zeilen und die Spalten, in denen vorne sowieso nur Nullen stehen, mit abzuschreiben. Außerdem muss man nicht alle Kreuze immer einzeichnen, Hauptsache, man macht einmal klar, dass man eben „Turbo-Gauß'' anwendet. Es genügt also auch das Folgende:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & -3 \\ -2 & -4 & 3 & 9 \\ 4 & -4 & 1 & 15 \end{array}\right) \text{ mit Turbo-Gauß } \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -6 & 2 & 12 \\ -12 & 10 & 42 \end{array}\right) \Rightarrow (-36|-108)$$

3) Man könnte auch mit Turbo-Gauß weitermachen, allerdings etwas abgewandelt: Zuerst muss man jede Zeile jeweils durch die Zahl teilen, die auf der Diagonalen steht. Dann macht man wieder Kreuzchen, diesmal rechnet man aber von **unten nach oben**, und das Ergebnis kommt jeweils rechts **oben** hin:

$$\begin{array}{cl} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -6 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & -36 & -108 \end{array}\right) & \begin{array}{l} :2 \\ :(-6) \\ :(-36) \end{array} \end{array}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0{,}5 & -1 & -1{,}5 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0{,}5 & 0 & 1{,}5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$