# Gruppenarbeit: Anwendungen trigonometrischer Funktionen

# Gruppe A: Pendel

1. Die Bewegung eines Federpendels lässt sich durch eine allgemeine Sinusfunktion beschreiben: für die Auslenkung y aus der Ruhelage in Abhängigkeit von der Zeit t gilt die Gleichung

$$y(t) = y_0 \sin(\omega\, t + \varphi_0),$$

Dabei ist $y_0$ die Amplitude der Schwingung, $\omega = 2\pi/T$ die Kreisfrequenz, T die Dauer einer Schwingung (Periodenlänge) und $\varphi_0$ gibt die Phase der Schwingung zur Zeit t = 0 an. Außerdem gilt folgender Zusammenhang zwischen Kreisfrequenz, Federkonstante D und Masse m des Pendelkörpers:

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

a) Geben Sie die Gleichung der Schwingung für den Fall an, dass sich das Pendel zur Zeit t = 0 in der Ruhelage befindet (y = 0). Warum gibt es zwei mögliche Lösungen?

Wählen Sie im Folgenden $\varphi_0 = 0$, D = 10,0 N/m, m = 0,400 kg und $y_0$ = 0,200 m.
b) Berechnen Sie die Gleichungen für die Geschwindigkeit v und die Beschleunigung a des Pendels in Abhängigkeit von der Zeit. (*Tipp:* Ableitungen!)
c) Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen y(t) und a(t) für zwei Perioden.
d) Berechnen Sie jeweils auf Millisekunden genau, wann das Pendel zum ersten Mal die halbe Auslenkung nach oben und wann es zum ersten Mal die halbe Auslenkung nach unten erreicht. Berechnen Sie außerdem, wann es zum ersten Mal die Geschwindigkeit 0,5 m/s erreicht.

2. Auch bei einem Fadenpendel kann man die Auslenkung x für nicht zu große Winkel (kleiner als etwa 10°) in Abhängigkeit von der Zeit durch eine allgemeine Sinusfunktion beschreiben; hier gilt allerdings:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}\,,$$

wobei g der Ortsfaktor und l die Pendellänge ist; die Kreisfrequenz ist also unabhängig von der Masse m des Pendelkörpers.
a) Geben Sie die Gleichung der Schwingung für den Fall an, dass das Pendel zur Zeit t = 0 seine größte positive Auslenkung $x_0$ hat.

Wählen Sie im Folgenden $\varphi_0 = \pi/2$, g = 10 m/s$^2$, l = 2,5 m, $x_0$ = 0,20 m und m = 1 kg.
b) Ermitteln Sie die Gleichung für die Geschwindigkeit v des Pendels in Abhängigkeit von der Zeit. Ermitteln Sie daraus eine Gleichung für die kinetische Energie $E_{kin}$ in Abhängigkeit von der Zeit. Zeichnen Sie den Graph der Funktion $E_{kin}(t)$ (zwei Schwingungsperioden).

3. Bei einer sogenannten harmonischen Schwingung gilt immer ein lineares Kraftgesetz der Form

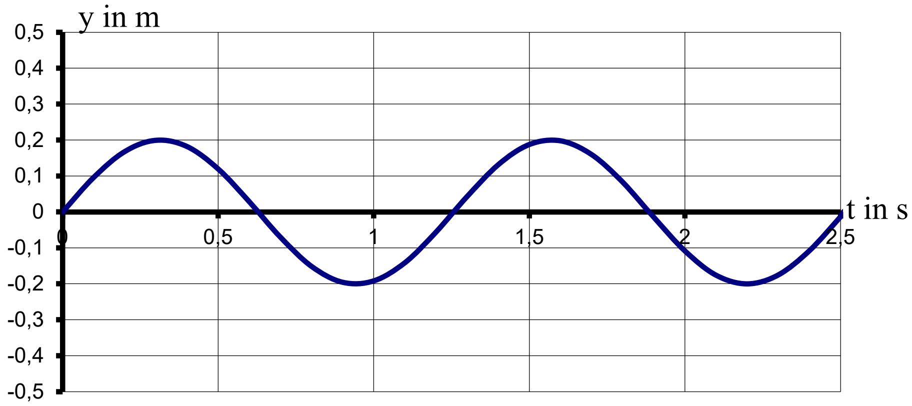
$$F(x) = -k\,x$$

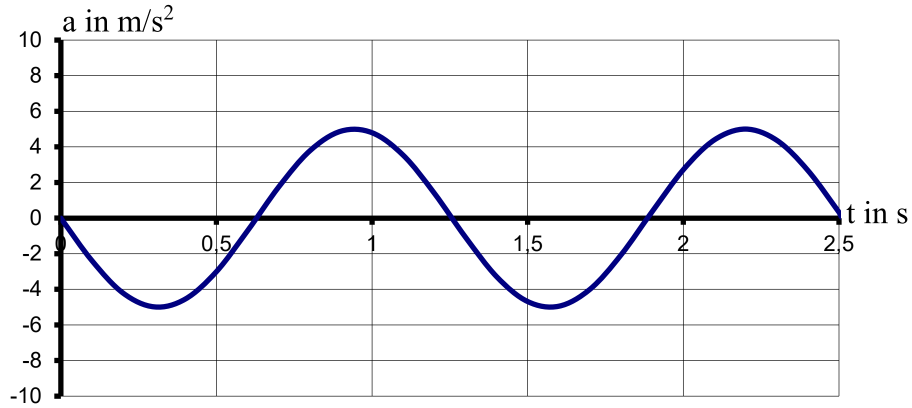
mit einer Konstanten k; außerdem gilt immer das 2. Newtonsche Gesetz $F = m\,a = m\,\ddot{x}$.
Stellen Sie mit Hilfe dieser beiden Gleichungen eine Gleichung auf, die angibt, wie die Beschleunigung $\ddot{x}$ von der Auslenkung x abhängt. Begründen Sie damit, warum sich die Auslenkung bei einer harmonischen Schwingung immer mit einer allgemeinen Sinusfunktion x(t) = a sin(bt + c) beschreiben lässt, wobei $b = \sqrt{\frac{k}{m}}$ gilt.

**1.** a) $y(t) = y_0 \sin(\omega t)$ oder $y(t) = y_0 \sin(\omega t + \pi) = -y_0 \sin(\omega t)$ (Bewegung nach oben oder unten)

b) $v(t) = 1\,\frac{m}{s} \cdot \cos(5\text{ Hz} \cdot t)$; $a(t) = -5\,\frac{m}{s^2} \cdot \sin(5\text{ Hz} \cdot t)$

c)

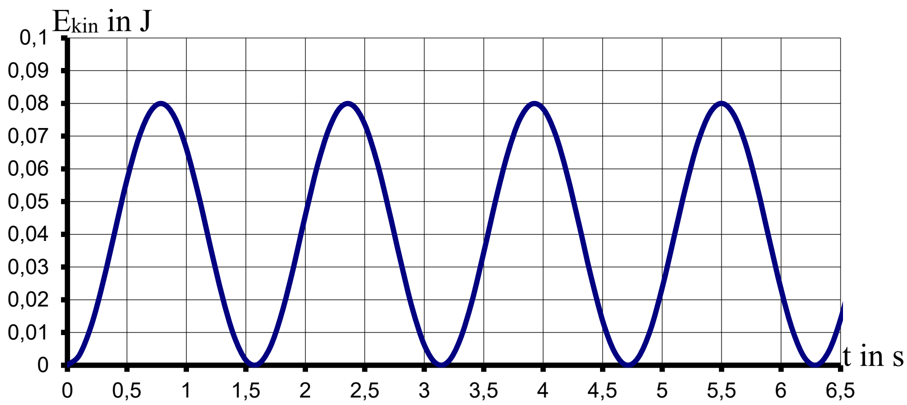



d) $\frac{\pi}{30}\text{s} \approx 0{,}105\text{ s}$; $\frac{7\pi}{30}\text{s} \approx 0{,}733\text{ s}$; $\frac{\pi}{15}\text{s} \approx 0{,}209\text{ s}$

**2.** a) $x(t) = x_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = x_0 \cos(\omega\, t)$

b) $v(t) = -40\,\frac{cm}{s} \cdot \sin(2\text{ Hz} \cdot t)$; $E_{kin}(t) = 0{,}08\text{ J} \cdot \sin^2(2\text{ Hz} \cdot t)$




**3**. es muss gelten: $-k\,x = m\,\ddot{x}$

bei der allgemeinen Sinusfunktion ergibt sich: $\ddot{x} = -b^2 \cdot a \sin(bt + c)$

einsetzen: $-k \cdot a \sin(bt + c) = -mb^2 \cdot a \sin(bt + c)$ ➔ $-k = -mb^2$ ➔ $b = \sqrt{\frac{k}{m}}$

# Gruppenarbeit: Anwendungen trigonometrischer Funktionen

# Gruppe B: Geschwindigkeiten und Kräfte

**Benutzen Sie für die Aufgaben hier das Gradmaß!**

1. Wird ein Ball unter einem Winkel $\alpha$ (ungleich 90° oder 0°) mit der Geschwindigkeit $v_0$ nach oben geworfen, so spricht man von einem „schiefen Wurf". Wählt man das Koordinatensystem so, dass der Ball vom Ursprung aus abgeworfen wird, die x-Achse parallel zum Boden und die y-Achse nach oben zeigt und vernachlässigt man den Luftwiderstand, so lauten die Zeit-Ort-Funktionen dann:

$$x(t) = v_0 \cos \alpha \cdot t$$
$$y(t) = -0{,}5\, g\, t^2 + v_0 \sin \alpha \cdot t$$

a) Berechnen Sie, zu welcher Zeit der Ball wieder auf dem Boden ($y = 0$) aufkommt.
b) Berechnen Sie die Wurfweite $x_W$ (also die Stelle, an welcher der Ball auf dem Boden aufkommt). Vereinfachen Sie Ihr Ergebnis mit Hilfe der Formel für $\sin(2\alpha)$ aus der Formelsammlung.
c) Zeichnen Sie den Graph der Funktion $x_w(\alpha)$ für $v_0 = 10$ m/s, $g = 10$ m/s$^2$ in einem sinnvollen Bereich.
d) Berechnen Sie mit den Daten aus (c), wie groß $\alpha$ gewählt werden muss, um eine Wurfweite von 5 m zu erreichen. (zwei Lösungen!)
e) Berechnen Sie (zunächst mit den Daten aus (c), dann allgemein), für welchen Winkel $\alpha$ die Wurfweite am größten wird (wie groß nämlich?).

2. Ein Boot fährt mit der Eigengeschwindigkeit $v_B$ über einen Fluss der Breite b mit der Strömungsgeschwindigkeit $v_S$, die größer ist als $v_B$ (das Boot wird also auf jeden Fall abgetrieben). Um die Abdrift so klein wie möglich zu halten, fährt das Boot nicht geradeaus direkt über den Fluss, sondern unter einem Winkel $\alpha$ gegen die Strömungsrichtung. Für die Zeit-Ort-Funktionen des Boots gilt dann (x-Achse in Strömungs-, y-Achse in direkte Überquerungsrichtung, Ursprung am Startpunkt des Boots am Flussufer):

$$x(t) = (v_S + v_B \cos \alpha)\, t$$
$$y(t) = v_B \sin \alpha \cdot t$$

a) Berechnen Sie die Zeit T, die zur Überquerung des Flusses benötigt wird, und die Abdrift s des Bootes in dieser Zeit. (Teilergebnis: $s = \frac{b}{v_B} \cdot \frac{v_S + v_B \cos\alpha}{\sin\alpha}$)
b) Geben Sie eine im Sachzusammenhang sinnvolle Definitionsmenge für die Funktion $s(\alpha)$ an.
c) Die Ableitung dieser Funktion ist $s'(\alpha) = -\frac{b}{v_B} \cdot \frac{v_B + v_S \cos\alpha}{\sin^2\alpha}$ (das brauchen Sie nicht nachzurechnen!). Geben Sie an, welche Bedingung für den Winkel $\alpha$ erfüllt sein muss, damit die Abdrift extremal ist und begründen Sie, warum es sich um ein Minimum handelt. Berechnen Sie diesen Winkel für $v_B = 1{,}5$ m/s und $v_S = 3{,}0$ m/s.

***Bitte wenden!***

3. Ein Bohnerbesen wird über den Boden geschoben. Er hat dabei einen Winkel $\alpha$ zum Boden, und auf ihn wird (in Stielrichtung) eine Kraft F ausgeübt. Außerdem wirkt noch die Gewichtskraft G auf den Bohnerbesen. Die Reibungskraft $F_R$ berechnet sich nach $F_R = \mu F_N$, wobei $F_N$ die gesamte Kraft ist, mit welcher der Bohnerbesen auf den Boden gedrückt wird. Damit sich der Bohnerbesen bewegen kann, muss die Horizontalkomponente von F mindestens so groß sein wie die Reibungskraft; das führt auf die Bedingung:

$$F \geq \frac{\mu G}{\cos\alpha - \mu \sin\alpha}$$

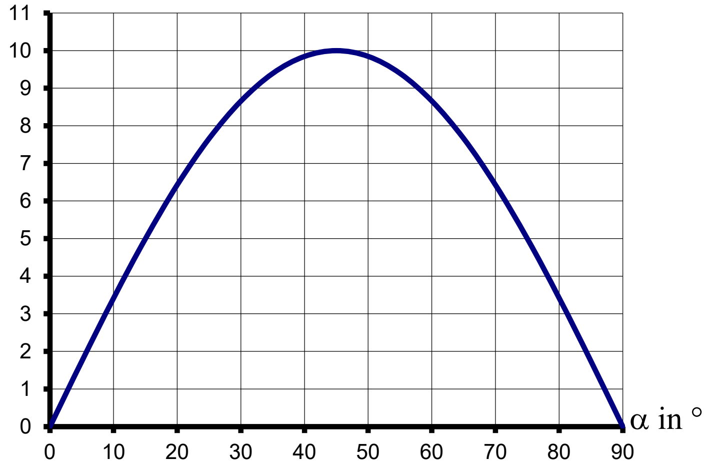
Im Folgenden nehmen wir an, dass F *genau gleich* dieser benötigten Mindestkraft ist.

a) Geben Sie an, welche Bedingung für den Winkel $\alpha$ erfüllt sein muss, damit eine Bewegung überhaupt möglich ist (*Tipp*: F muss größer gleich Null sein!).
b) Geben Sie für G = 50 N und $\mu$ = 0,4 eine im Sachzusammenhang sinnvolle Definitionsmenge der Funktion $F(\alpha)$ (mit Hilfe des Ergebnisses in (a); runden Sie dabei auf eine Dezimale) an und zeichnen Sie ihren Graph.

**1.** a) $t = \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g}$  b) $xw = \dfrac{v_0^2}{g} \cdot 2\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$

c) $xw(\alpha) = 10\ \text{m} \cdot \sin(2\alpha)$  d) 15° oder 75°  e) 45° bzw. 45° bzw. $\dfrac{v_0^2}{g}$

xw in m

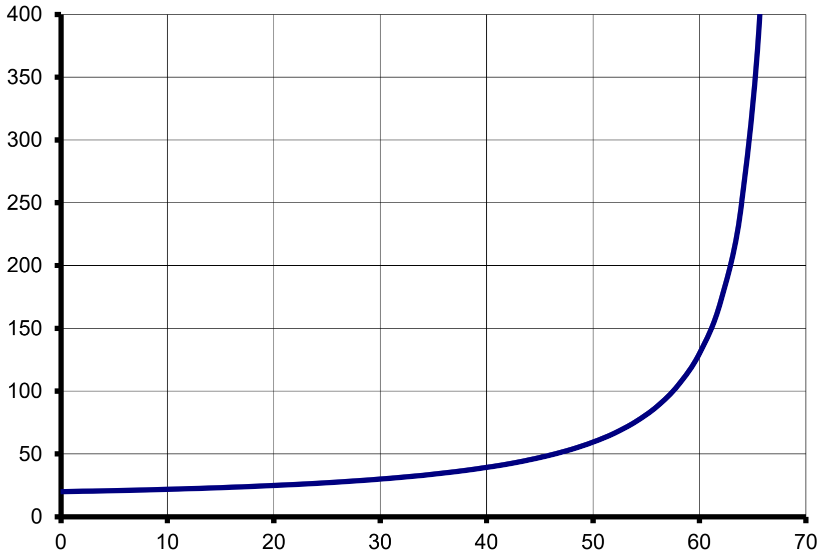



**2.** a) $T = \dfrac{b}{v_B \sin\alpha}$; s siehe Angabe  b) D = [90°; 180°[  (über den Fluss und gegen die Strömung)

c) $\cos\alpha = -\dfrac{v_B}{v_S}$;  Zähler des Bruchs wechselt an dieser Stelle das VZ von + nach – ➔ s' wechselt

das VZ von – nach + ➔ Minimum;  $\alpha = 120°$

**3.** a) $\tan\alpha \le \dfrac{1}{\mu}$  b) D = [0°; 68,2°[



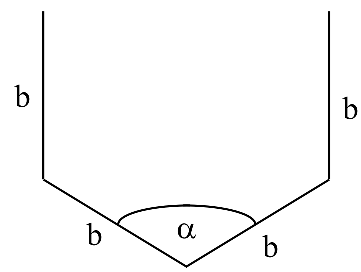
# Gruppenarbeit: Anwendungen trigonometrischer Funktionen

# Gruppe C: Geometrische Probleme

**Benutzen Sie für die Aufgaben hier das Gradmaß!**

1. Der Flächeninhalt A eines gleichschenkligen Dreiecks hängt offensichtlich von der Länge s seiner Schenkel und vom Winkel $\alpha$ an seiner Spitze ab. Begründen Sie zunächst, dass gilt: $A(\alpha) = \frac{1}{2} s^2 \sin(\alpha)$ (Tipp: Eigenschaften des Vektorprodukts, FS S. 8), und geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge an. Ermitteln Sie dann, für welchen Winkel $\alpha$ der Flächeninhalt extremal wird. Geben Sie an, ob es sich um ein Minimum oder ein Maximum handelt, und geben Sie den extremalen Flächeninhalt an.

2. Aus vier gleichen Brettern (Breite b = 0,5 m, Länge l = 10 m) soll eine oben offene symmetrische Rinne so hergestellt werden, dass zwei der Wände parallel sind:

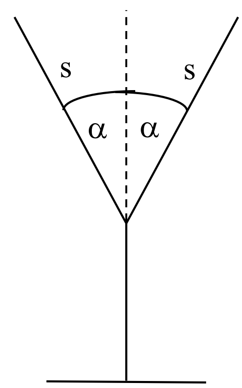



a) Begründen Sie, dass für das Fassungsvermögen V der Rinne in Abhängigkeit vom Winkel $\alpha$ gilt:

$$V(\alpha) = 1{,}25 \sin\alpha + 5 \sin(\alpha/2)$$

b) Berechnen Sie auf eine Dezimale genau, für welchen Winkel $\alpha$ das Fassungsvermögen extremal wird. Ermitteln Sie, ob es sich um ein Minimum oder ein Maximum handelt, und geben Sie das extremale Fassungsvermögen an.

3. (nach Abschlussprüfung 2008–AII) Der Kelch eines Eisbechers soll die Form eines auf der Spitze stehenden Kegels haben. Das vorgegebene Innenmaß der Mantellinie wird mit s und der halbe Öffnungswinkel mit $\alpha$ bezeichnet.




a) Stellen Sie die Volumenmaßzahl $V(\alpha)$ des Kelchs in Abhängigkeit von $\alpha$ dar; geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge an. (mögliches Ergebnis; $V(\alpha) = \frac{\pi}{3} \cdot s^3 \cdot (\sin\alpha)^2 \cdot \cos\alpha$ )

b) Die Ableitung dieser Funktion ist $V'(\alpha) = \frac{\pi}{3} \cdot s^3 \cdot \left[2\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha\right]$. Bestimmen Sie ohne Verwendung der zweiten Ableitung den Winkel $\alpha$ auf eine Dezimale genau, sodass der Kelch das größtmögliche Volumen besitzt.

**1.** aus der Geometrie (FS S. 11): $A = \frac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$ ==> $A = \frac{1}{2}\, a\, b \sin\alpha = \frac{1}{2}\, s^2 \sin\alpha$; $\mathsf{D} = ]0°;180°[$
sin ist maximal für $\alpha = 90°$ ➔ A ist maximal für $\alpha = 90°$; $A_{max} = \frac{1}{2}\, s^2$

**2.** a) wird die halbe Breite der Rinne mit x bezeichnet, so gilt: $\frac{x}{b} = \sin\frac{\alpha}{2}$

Querschnittsfläche: $A = b \cdot 2x + \frac{1}{2}\, b^2 \sin\alpha$ (mit der Formel aus Aufgabe 1)

x einsetzen: $A = 2\, b^2 \sin\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\, b^2 \sin\alpha$ ➔ Fassungsvermögen: $V = A \cdot l = 2\, b^2\, l \sin\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\, b^2\, l \sin\alpha$

mit den gegebenen Zahlenwerten ergibt sich dann das $V(\alpha)$ aus der Angabe

b) $V' = 1{,}25 \cos\alpha + 2{,}5 \cos(\alpha/2) = 0$
mit der Formel für $\cos(2\alpha)$ (FS S. 39) ergibt sich: $\cos\alpha = 2\cos^2(\alpha/2) - 1$; einsetzen und substituieren

von $u = \cos(\alpha/2)$ führt auf $u_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$ und schließlich auf $\alpha \approx 137{,}1°$

V' wechselt an dieser Stelle von + nach – ➔ Maximum; $V_{max} \approx 5{,}5$

**3.** a) $\frac{r}{s} = \sin\alpha$ ; $\frac{h}{s} = \cos\alpha$ ; nach r bzw. h umstellen und in $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ einsetzen; $\mathsf{D} = ]0°;90°[$

b) V' = 0 ➔ $2\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha = 0$ ➔ $\sin\alpha\,(2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 0$ ➔ $\sin\alpha\,(3\cos^2\alpha - 1) = 0$,

also $\sin\alpha = 0$ (ergibt keine Lösung in $\mathsf{D}$) oder $\cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{3}}$ ➔ $\alpha \approx 54{,}7°$

$\sin\alpha$ ist in $\mathsf{D}$ überall positiv, $3\cos^2\alpha - 1$ wechselt an dieser Stelle das VZ von + nach –

➔ V' wechselt an dieser Stelle das VZ von + nach – ➔ Maximum

# Gruppenarbeit: Anwendungen trigonometrischer Funktionen

# Gruppe D: Wechselströme und senkrechter Wurf mit Luftwiderstand

1. Bei sinusförmigen Wechselströmen der Amplitude $I_0$ und der Periodenlänge T gilt für die Stromstärke I in Abhängigkeit von der Zeit t allgemein:

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Dabei ist $\omega = \frac{2\pi}{T}$ die Kreisfrequenz und $\varphi_0$ die Phase zur Zeit t = 0; im Folgenden gilt immer $\varphi_0 = 0$.

a) Zeichnen Sie den Graphen von I(t) (zwei Perioden) für T = 3,0 s und $I_0$ = 5,0 A.

b) Für die induzierte Spannung $U_L$ in einer Spule mit der Induktivität L > 0 gilt $U_L = L\,\dot{I}$. Geben Sie die Gleichung für die Spannung $U_L$ in Abhängigkeit von der Zeit an (rechnen Sie hier allgemein mit Buchstaben!) und skizzieren Sie den Graphen von $U_L(t)$ für T = 3,0 s. Welche Amplitude ergibt sich für diese Spannung? Welchen Widerstand hat eine Spule also, wenn man den Widerstand einfach als Quotienten der Amplituden von Spannung und Stromstärke berechnet? (wieder allgemein rechnen!)

c) Für die Ladung Q in einem Kondensator gilt: I(t) ist die Ableitungsfunktion von Q(t). Geben Sie Q(t) unter der Bedingung an, dass die Ladung auf dem Kondensator im Mittel gleich 0 ist. Geben Sie außerdem eine Gleichung für die Spannung $U_C = Q/C$ an einem Kondensator der Kapazität in Abhängigkeit von der Zeit t an (rechnen Sie hier allgemein mit Buchstaben!) und skizzieren Sie den Graphen von $U_C(t)$ für T = 3,0 s. Welche Amplitude ergibt sich für diese Spannung? Welchen Widerstand hat ein Kondensator also, wenn man den Widerstand einfach als Quotienten der Amplituden von Spannung und Stromstärke berechnet? (wieder allgemein rechnen!)

d) Für die Spannung $U_R$ an einem ohmschen Widerstand gilt: $U_R = R\,I$. Geben Sie die Gleichung für die Spannung $U_R$ und die Leistung P = U I in Abhängigkeit von der Zeit an. Ermitteln Sie den Mittelwert der Leistung während einer Periode mithilfe der Formel für $\left(\sin\frac{\varphi}{2}\right)^2$ aus der Formelsammlung; drücken Sie das Ergebnis durch $U_0$ und R aus. (wieder allgemein rechnen!)

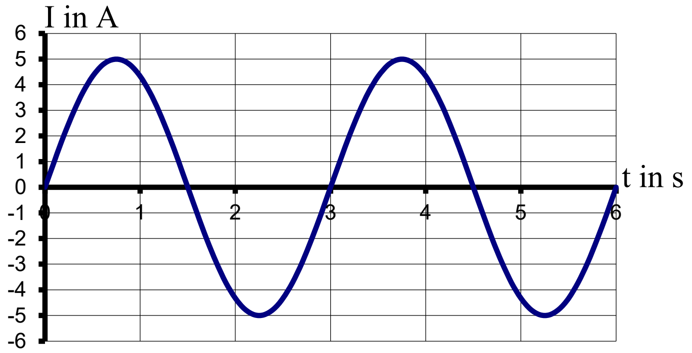
e) Unter dem Effektivwert einer Wechselspannung versteht man die Gleichspannung $U_{eff}$, die am selben Widerstand dieselbe Leistung hervorruft wie die Wechselspannung im Mittel. Bestimmen Sie den Zusammenhang zwischen $U_{eff}$ und $U_0 = R\,I_0$.

2. Wirft man einen Gegenstand mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0$ in die Höhe, dann gilt für seine Geschwindigkeit v in Abhängigkeit von der Zeit t bekanntlich $v(t) = -g \cdot t + v_0$ (I) mit dem Ortsfaktor g (= Fallbeschleunigung). Das ist aber eigentlich nur dann richtig, wenn man den Luftwiderstand vernachlässigen kann. Für die Luftwiderstandskraft gilt allgemein: $F = -k \cdot v^2$ mit einer Konstanten $k$, die von der Form des Gegenstands und seiner Querschnittsfläche abhängt. Ist der Luftwiderstand groß, ergibt sich für die Geschwindigkeit v in Abhängigkeit von der Zeit:

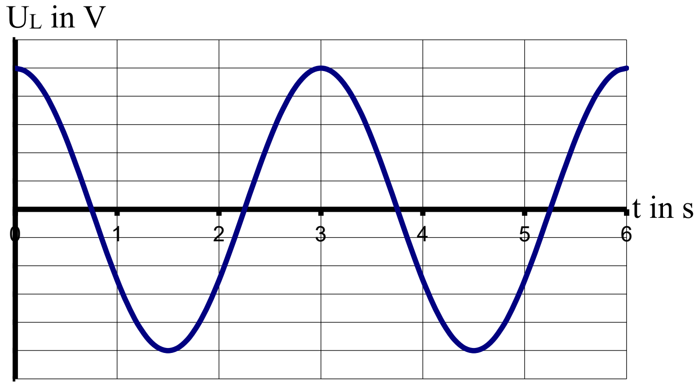
$$v(t) = \sqrt{\frac{g}{k}} \cdot \tan\left(-\sqrt{gk} \cdot t + \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{k}{g}}\, v_0\right)\right) \quad \text{(II)}$$

(zumindest bis zu dem Zeitpunkt, wenn v = 0 ist, der Gegenstand also seinen höchsten Punkt erreicht – danach braucht man dann wieder eine andere Funktion…) Verwenden Sie im Folgenden die konkreten Zahlenwerte $v_0 = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}}, g = 10\ \frac{\text{m}}{s^2}, k = 0{,}1\ \frac{1}{\text{m}}$. Geben Sie dafür jeweils für beide Funktionen (I) und (II) die Funktionsterme an und berechnen Sie jeweils den Zeitpunkt $t_0$, zu dem v(0) = 0 wird. Zeichnen Sie dann die Graphen dazu jeweils für $0 \le t \le t_0$ und treffen Sie eine Aussage zum Einfluss des Luftwiderstands auf die beim Wurf erreichte Höhe.

**1.** a)

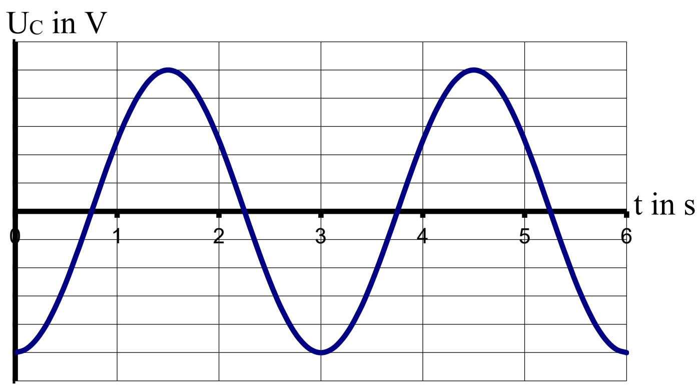



b) $U_L(t) = L\, I_0\, \omega \cos(\omega t)$; Amplitude: $U_{L0} = L\, I_0\, \omega$ ➔ Widerstand: $R = L\, \omega$




c) $Q(t) = -\frac{I_0}{\omega} \cos(\omega t) + c$; im Mittel gleich 0 ➔ $c = 0$

➔ $U_C(t) = -\frac{I_0}{C\omega} \cos(\omega t)$; Amplitude: $U_{C0} = \frac{I_0}{C\omega}$ ➔ Widerstand: $R = \frac{1}{C\omega}$




d) $U_R(t) = R\, I_0 \sin(\omega t)$; $P(t) = R\, I_0^2 \sin^2(\omega t)$

FS: $\left(\sin\frac{\varphi}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\,(1 - \cos\varphi)$; setze $\frac{\varphi}{2} = \omega t$ ➔ $\varphi = 2\omega t$

➔ $P(t) = \frac{R I_0^2}{2}\,(1 - \cos\varphi)$ ➔ Mittelwert: $\frac{1}{2}\, R\, I_0^2 = \frac{U_0^2}{2R}$

e) Gleichspannung: $P = U_{eff}\, I = \frac{U_{eff}^2}{R}$; das soll gleich $\overline{P}$ aus (d) sein ➔ $U_{eff} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$

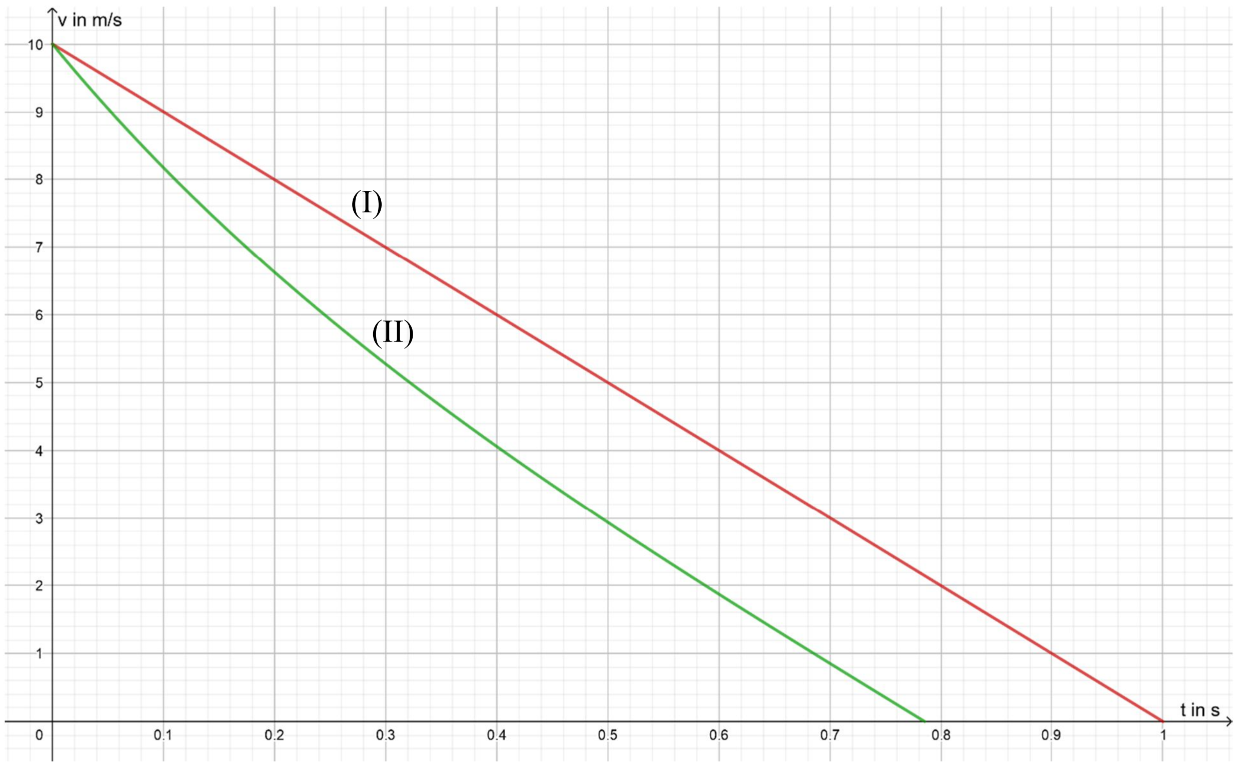
**2.**

(I) $v(t) = -10\ \frac{\mathrm{m}}{s^2} \cdot t + 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

$v(t_0) = -10\ \frac{\mathrm{m}}{s^2} \cdot t_0 + 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 0 \Rightarrow t_0 = 1\ s$

(II) $v(t) = 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \tan\left(-\frac{1}{\mathrm{s}} \cdot t + \tan^{-1}(1)\right) = 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \tan\left(-\frac{1}{\mathrm{s}} \cdot t + \frac{\pi}{4}\right)$

$v(t_0) = 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \tan\left(-\frac{1}{\mathrm{s}} \cdot t_0 + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow t_0 = \frac{\pi}{4}\ s \approx 0{,}79\ s$




Die zurückgelegte Strecke und damit die erreichte Höhe entspricht jeweils dem Inhalt der Fläche unter dem Graphen. ➔ Wenn der Luftwiderstand stark ist, wird eine deutlich geringere Höhe erreicht, als wenn man ihn vernachlässigen kann. *(Den Inhalt der Fläche unter dem ersten Graph kann man direkt berechnen, denn es ist ja ein Dreieck, den Inhalt der Fläche unter dem zweiten Graph kann man zumindest abschätzen: Ohne Luftwiderstand wird eine Höhe von 5 m erreicht, mit Luftwiderstand nur etwa 3,5 m.)*