Gruppenarbeit: Anwendungen trigonometrischer Funktionen

Gruppe A: Pendel

1. Die Bewegung eines Federpendels lässt sich durch eine allgemeine Sinusfunktion beschreiben: für die Auslenkung y aus der Ruhelage in Abhängigkeit von der Zeit t gilt die Gleichung

$$y(t) = y_0 \sin(\omega t + \varphi_0),$$

Dabei ist y_0 die Amplitude der Schwingung, $\omega = 2\pi/T$ die Kreisfrequenz, T die Dauer einer Schwingung (Periodenlänge) und φ_0 gibt die Phase der Schwingung zur Zeit t = 0 an. Außerdem gilt folgender Zusammenhang zwischen Kreisfrequenz, Federkonstante D und Masse m des Pendelkörpers:

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

a) Geben Sie die Gleichung der Schwingung für den Fall an, dass sich das Pendel zur Zeit t = 0 in der Ruhelage befindet (y = 0). Warum gibt es zwei mögliche Lösungen?

Wählen Sie im Folgenden $\varphi_0 = 0$, D = 10,0 N/m, m = 0,400 kg und $y_0 = 0{,}200$ m.

b) Berechnen Sie die Gleichungen für die Geschwindigkeit v und die Beschleunigung a des Pendels in Abhängigkeit von der Zeit. (*Tipp:* Ableitungen!)

c) Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen y(t) und a(t) für zwei Perioden.

d) Berechnen Sie, wann das Pendel zum ersten Mal die halbe Auslenkung nach oben und wann es zum ersten Mal die halbe Auslenkung nach unten erreicht. Berechnen Sie außerdem, wann es zum ersten Mal die Geschwindigkeit 0,5 m/s erreicht.

2. Auch bei einem Fadenpendel kann man die Auslenkung x für nicht zu große Winkel (kleiner als etwa 10°) in Abhängigkeit von der Zeit durch eine allgemeine Sinusfunktion beschreiben; hier gilt allerdings:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}\ ,$$

wobei g der Ortsfaktor und l die Pendellänge ist; die Kreisfrequenz ist also unabhängig von der Masse m des Pendelkörpers.

a) Geben Sie die Gleichung der Schwingung für den Fall an, dass das Pendel zur Zeit t = 0 seine größte positive Auslenkung x_0 hat.

Wählen Sie im Folgenden $\varphi_0 = \pi/2$, g = 10 m/s², l = 2,5 m, $x_0 = 0{,}20$ m und m = 1 kg.

b) Ermitteln Sie die Gleichung für die Geschwindigkeit v des Pendels in Abhängigkeit von der Zeit. Ermitteln Sie daraus eine Gleichung für die kinetische Energie E_{kin} in Abhängigkeit von der Zeit. Zeichnen Sie den Graph der Funktion $E_{kin}(t)$ (zwei Schwingungsperioden).

3. Bei einer sogenannten harmonischen Schwingung gilt immer ein lineares Kraftgesetz der Form

$$F(x) = -k\,x$$

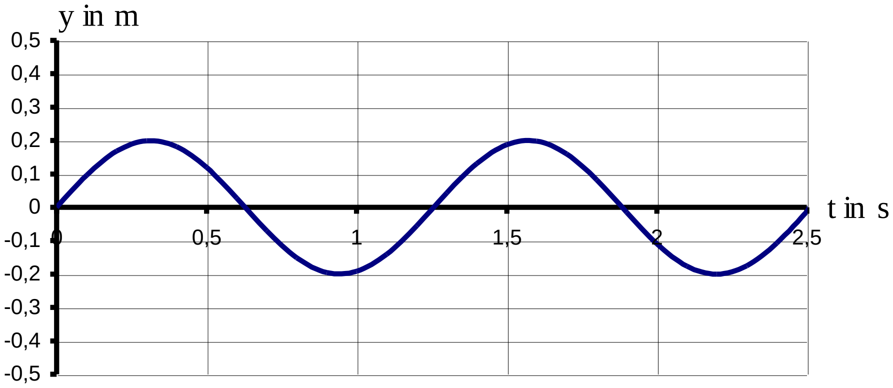
mit einer Konstanten k; außerdem gilt immer das 2. Newtonsche Gesetz $F = m\,a = m\ddot{x}$.

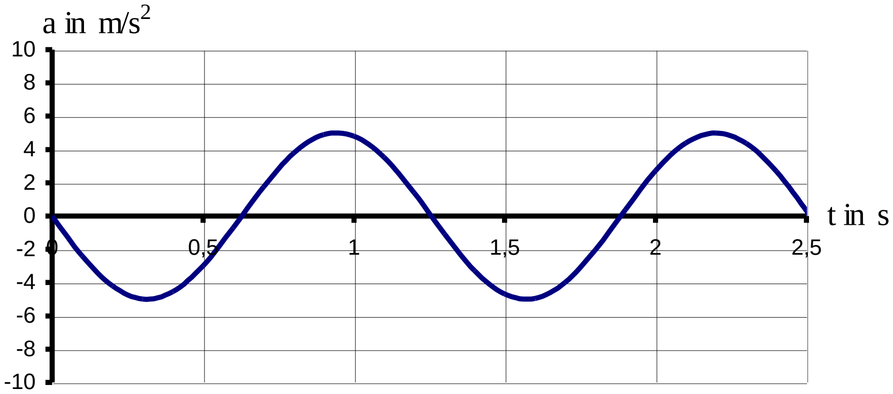
Stellen Sie mit Hilfe dieser beiden Gleichungen eine Gleichung auf, die angibt, wie die Beschleunigung $\ddot{x}$ von der Auslenkung x abhängt. Begründen Sie damit, warum sich die Auslenkung bei einer harmonischen Schwingung immer mit einer allgemeinen Sinusfunktion x(t) = a sin(bt + c) beschreiben lässt, wobei $b = \sqrt{\frac{k}{m}}$ gilt.

1. a) $y(t) = y_0 \sin(\omega t)$ oder $y(t) = y_0 \sin(\omega t + \pi) = -y_0 \sin(\omega t)$ (Bewegung nach oben oder unten)

b) $v(t) = 1\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \cos(5\text{ Hz} \cdot t)$; $a(t) = -5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \sin(5\text{ Hz} \cdot t)$

c)

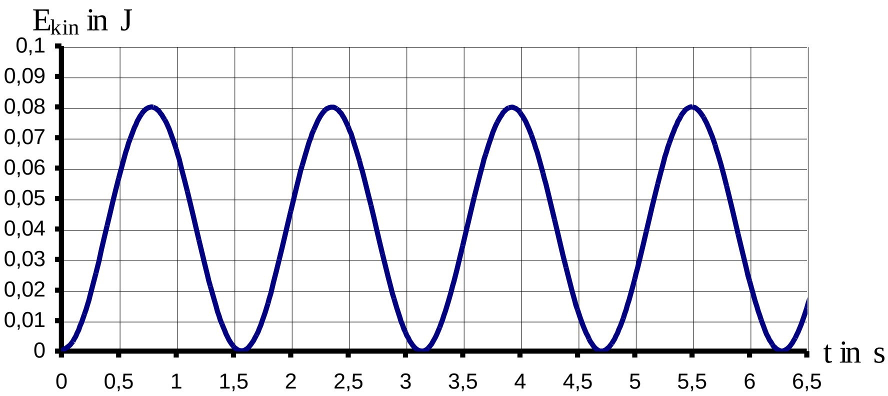




d) $\frac{\pi}{30}\,\text{s} \approx 0{,}105\text{ s}$; $\frac{7\pi}{30}\,\text{s} \approx 0{,}733\text{ s}$; $\frac{\pi}{15}\,\text{s} \approx 0{,}209\text{ s}$

2. a) $x(t) = x_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = x_0 \cos(\omega\, t)$

b) $v(t) = -40\,\frac{\text{cm}}{\text{s}} \cdot \sin(2\text{ Hz} \cdot t)$; $E_{kin}(t) = 0{,}08\text{ J} \cdot \sin^2(2\text{ Hz} \cdot t)$



3. es muss gelten: $-k\,x = m\ddot{x}$

bei der allgemeinen Sinusfunktion ergibt sich: $\ddot{x} = -b^2 \cdot a \sin(bt + c)$

einsetzen: $-k \cdot a \sin(bt + c) = -mb^2 \cdot a \sin(bt + c)$ ➔ $-k = -mb^2$ ➔ $b = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Gruppenarbeit: Anwendungen trigonometrischer Funktionen

Gruppe B: Geschwindigkeiten und Kräfte

Benutzen Sie für die Aufgaben hier das Gradmaß!

1. Wird ein Ball unter einem Winkel α (ungleich 90° oder 0°) mit der Geschwindigkeit v_0 nach oben geworfen, so spricht man von einem „schiefen Wurf“. Wählt man das Koordinatensystem so, dass der Ball vom Ursprung aus abgeworfen wird, die x-Achse parallel zum Boden und die y-Achse nach oben zeigt und vernachlässigt man den Luftwiderstand, so lauten die Zeit-Ort-Funktionen dann:

$$x(t) = v_0 \cos\alpha \cdot t$$
$$y(t) = -0{,}5\, g\, t^2 + v_0 \sin\alpha \cdot t$$

a) Berechnen Sie, zu welcher Zeit der Ball wieder auf dem Boden ($y = 0$) aufkommt.
b) Berechnen Sie die Wurfweite x_W (also die Stelle, an welcher der Ball auf dem Boden aufkommt). Vereinfachen Sie Ihr Ergebnis mit Hilfe der Formel für $\sin(2\alpha)$ aus der Formelsammlung.
c) Zeichnen Sie den Graph der Funktion $x_w(\alpha)$ für $v_0 = 10$ m/s, $g = 10$ m/s^2 in einem sinnvollen Bereich.
d) Berechnen Sie mit den Daten aus (c), wie groß α gewählt werden muss, um eine Wurfweite von 5 m zu erreichen. (zwei Lösungen!)
e) Berechnen Sie (zunächst mit den Daten aus (c), dann allgemein), für welchen Winkel α die Wurfweite am größten wird (wie groß nämlich?).

2. Ein Boot fährt mit der Eigengeschwindigkeit v_B über einen Fluss der Breite b mit der Strömungsgeschwindigkeit v_S, die größer ist als v_B (das Boot wird also auf jeden Fall abgetrieben). Um die Abdrift so klein wie möglich zu halten, fährt das Boot nicht geradeaus direkt über den Fluss, sondern unter einem Winkel α gegen die Strömungsrichtung. Für die Zeit-Ort-Funktionen des Boots gilt dann (x-Achse in Strömungs-, y-Achse in direkte Überquerungsrichtung, Ursprung am Startpunkt des Boots am Flussufer):

$$x(t) = (v_S + v_B \cos\alpha)\, t$$
$$y(t) = v_B \sin\alpha \cdot t$$

a) Berechnen Sie die Zeit T, die zur Überquerung des Flusses benötigt wird, und die Abdrift s des Bootes in dieser Zeit. (Teilergebnis: $s = \frac{b}{v_B} \cdot \frac{v_S + v_B \cos\alpha}{\sin\alpha}$)
b) Geben Sie eine im Sachzusammenhang sinnvolle Definitionsmenge für die Funktion $s(\alpha)$ an.
c) Die Ableitung dieser Funktion ist $s'(\alpha) = -\frac{b}{v_B} \cdot \frac{v_B + v_S \cos\alpha}{\sin^2\alpha}$ (das brauchen Sie nicht nachzurechnen!). Geben Sie an, welche Bedingung für den Winkel α erfüllt sein muss, damit die Abdrift extremal ist und begründen Sie, warum es sich um ein Minimum handelt. Berechnen Sie diesen Winkel für $v_B = 1{,}5$ m/s und $v_S = 3{,}0$ m/s.

Bitte wenden!

3. Ein Bohnerbesen wird über den Boden geschoben. Er hat dabei einen Winkel α zum Boden, und auf ihn wird (in Stielrichtung) eine Kraft F ausgeübt. Außerdem wirkt noch die Gewichtskraft G auf den Bohnerbesen. Die Reibungskraft F_R berechnet sich nach $F_R = \mu F_N$, wobei F_N die gesamte Kraft ist, mit welcher der Bohnerbesen auf den Boden gedrückt wird. Damit sich der Bohnerbesen bewegen kann, muss die Horizontalkomponente von F mindestens so groß sein wie die Reibungskraft; das führt auf die Bedingung:

$$F \geq \frac{\mu G}{\cos\alpha - \mu \sin\alpha}$$

Im Folgenden nehmen wir an, dass F *genau gleich* dieser benötigten Mindestkraft ist.

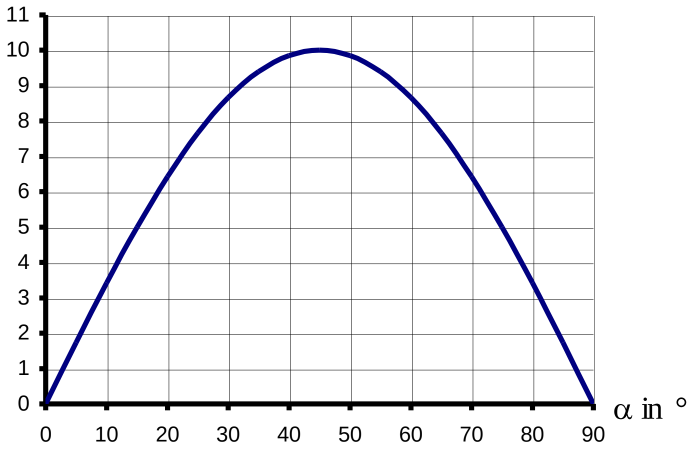
a) Geben Sie an, welche Bedingung für den Winkel α erfüllt sein muss, damit eine Bewegung überhaupt möglich ist (*Tipp*: F muss größer gleich Null sein!).

b) Geben Sie für G = 50 N und μ = 0,4 eine im Sachzusammenhang sinnvolle Definitionsmenge der Funktion $F(\alpha)$ (mit Hilfe des Ergebnisses in (a)) an und zeichnen Sie ihren Graph.

1. a) $t = \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g}$ b) $x_W = \dfrac{v_0^2}{g} \cdot 2\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$

c) $x_W(\alpha) = 10\text{ m} \cdot \sin(2\alpha)$ d) 15° oder 75° e) 45° bzw. 45° bzw. $\dfrac{v_0^2}{g}$

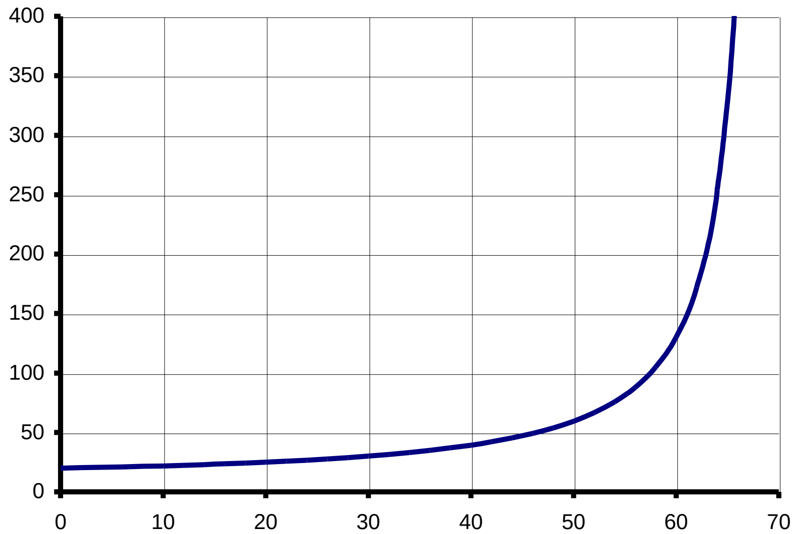
x_W in m



2. a) $T = \dfrac{b}{v_B \sin\alpha}$; s siehe Angabe b) D = [90°; 180°[(über den Fluss und gegen die Strömung)

c) $\cos\alpha = -\dfrac{v_B}{v_S}$; Zähler des Bruchs wechselt an dieser Stelle das VZ von + nach – ➔ s' wechselt das VZ von – nach + ➔ Minimum; $\alpha = 120°$

3. a) $\tan\alpha \le \dfrac{1}{\mu}$ b) D = [0°; 68,2°[



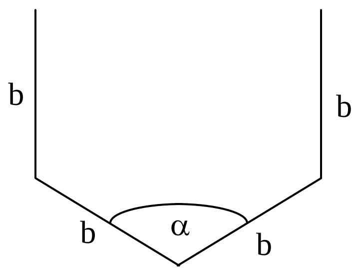
Gruppenarbeit: Anwendungen trigonometrischer Funktionen

Gruppe C: Geometrische Probleme

Benutzen Sie für die Aufgaben hier das Gradmaß!

1. Der Flächeninhalt A eines gleichschenkligen Dreiecks hängt offensichtlich von der Länge s seiner Schenkel und vom Winkel α an seiner Spitze ab. Begründen Sie zunächst, dass gilt: $A(\alpha) = 0{,}5\ s^2 \sin(\alpha)$ (Benutzen Sie dafür die Formelsammlung!), und geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge an. Ermitteln Sie dann, für welchen Winkel α der Flächeninhalt extremal wird. Geben Sie an, ob es sich um ein Minimum oder ein Maximum handelt, und geben Sie den extremalen Flächeninhalt an.

2. Aus vier gleichen Brettern (Breite b = 0,5 m, Länge l = 10 m) soll eine oben offene symmetrische Rinne so hergestellt werden, dass zwei der Wände parallel sind:

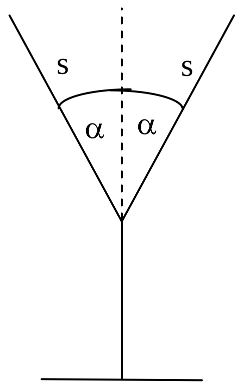


a) Begründen Sie, dass für das Fassungsvermögen V der Rinne in Abhängigkeit vom Winkel α gilt:

$$V(\alpha) = 1{,}25 \sin\alpha + 5 \sin(\alpha/2)$$

b) Berechnen Sie, für welchen Winkel α das Fassungsvermögen extremal wird. Ermitteln Sie, ob es sich um ein Minimum oder ein Maximum handelt, und geben Sie das extremale Fassungsvermögen an.

3. (nach Abschlussprüfung 2008–AII) Der Kelch eines Eisbechers soll die Form eines auf der Spitze stehenden Kegels haben. Das vorgegebene Innenmaß der Mantellinie wird mit s und der halbe Öffnungswinkel mit α bezeichnet.



a) Stellen Sie die Volumenmaßzahl $V(\alpha)$ des Kelchs in Abhängigkeit von α dar; geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge an.

(mögliches Ergebnis; $V(\alpha) = \frac{\pi}{3} \cdot s^3 \cdot (\sin\alpha)^2 \cdot \cos\alpha$)

b) Die Ableitung dieser Funktion ist $V'(\alpha) = \frac{\pi}{3} \cdot s^3 \cdot \left[2\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha\right]$. Bestimmen Sie ohne Verwendung der zweiten Ableitung den Winkel α so, dass der Kelch das größtmögliche Volumen besitzt.

1. FS S. 27: A = $\frac{1}{2}ab\sin\gamma$ = 0,5 s^2 sin α (mit a = b = s; $\gamma = \alpha$); D =]0°;180°[

sin ist maximal für α = 90° ➔ A ist maximal für α = 90°; A_{max} = 0,5 s^2

2. a) wird die halbe Breite der Rinne mit x bezeichnet, so gilt: $\frac{x}{b} = \sin\frac{\alpha}{2}$

Querschnittsfläche: A = b·2x + $\frac{1}{2}$ b^2 sin α (mit der Formel aus Aufgabe 1)

x einsetzen: A = 2 $b^2 \sin\frac{\alpha}{2}$ + $\frac{1}{2}$ b^2 sin α ➔ Fassungsvermögen: V = A·l = 2 $b^2\, l \sin\frac{\alpha}{2}$ + $\frac{1}{2}$ $b^2 l$ sin α

mit den gegebenen Zahlenwerten ergibt sich dann das V(α) aus der Angabe

b) V’ = 1,25 cos α + 2,5 cos(α/2) = 0
mit der Formel für cos(2α) (FS S. 39) ergibt sich: cos α = 2 $\cos^2(\alpha/2) - 1$; einsetzen und substituieren

von u = cos(α/2) führt auf $u_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$ und schließlich auf $\alpha \approx 137{,}1°$

V’ wechselt an dieser Stelle von + nach – ➔ Maximum; $V_{max} \approx 5{,}5$

3. a) $\frac{r}{s} = \sin\alpha$; $\frac{h}{s} = \cos\alpha$; nach r bzw. h umstellen und in V = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ einsetzen; D =]0°;90°[

b) V’ = 0 ➔ $2\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha = 0$ ➔ sin α (2 $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha$) = 0 ➔ sin α (3 $\cos^2\alpha$ – 1) = 0,

also sin α = 0 (ergibt keine Lösung in D) oder cos $\alpha = \sqrt{\frac{1}{3}}$ ➔ $\alpha \approx 54{,}7°$

sin α ist in D überall positiv, 3 $\cos^2\alpha$ – 1 wechselt an dieser Stelle das VZ von + nach –

➔ V’ wechselt an dieser Stelle das VZ von + nach – ➔ Maximum

Gruppenarbeit: Anwendungen trigonometrischer Funktionen

Gruppe D: Wechselströme

1. Bei sinusförmigen Wechselströmen der Amplitude I_0 und der Periodenlänge T gilt für die Stromstärke I in Abhängigkeit von der Zeit t allgemein:

$$I(t) = I_0 \sin(\omega\, t + \varphi_0).$$

Dabei ist $\omega = \frac{2\pi}{T}$ die Kreisfrequenz und φ_0 die Phase zur Zeit t = 0; im Folgenden gilt immer $\varphi_0 = 0$.

a) Zeichnen Sie den Graphen von I(t) (zwei Perioden) für T = 3,0 s und I_0 = 5,0 A.

b) Für die induzierte Spannung U_L in einer Spule mit der Induktivität L > 0 gilt $U_L = L\,\dot{I}$. Geben Sie die Gleichung für die Spannung U_L in Abhängigkeit von der Zeit an und skizzieren Sie den Graph von $U_L(t)$ (T = 3,0 s). Welche Amplitude ergibt sich für diese Spannung? Welchen Widerstand hat eine Spule also, wenn man den Widerstand einfach als Quotienten der Amplituden von Spannung und Stromstärke berechnet?

c) Für die Ladung Q in einem Kondensator gilt: I(t) ist die Ableitungsfunktion von Q(t). Geben Sie Q(t) für den Fall an, dass sich zur Zeit t = 0 die Ladung auf dem Kondensator ihren kleinsten Wert hat. Geben Sie außerdem eine Gleichung für die Spannung $U_C = Q/C$ an einem Kondensator der Kapazität in Abhängigkeit von der Zeit t an und skizzieren Sie den Graph von $U_C(t)$. Welche Amplitude ergibt sich für diese Spannung? Welchen Widerstand hat ein Kondensator also, wenn man den Widerstand einfach als Quotienten der Amplituden von Spannung und Stromstärke berechnet?

d) Für die Spannung U_R an einem ohmschen Widerstand gilt: $U_R = R\,I$. Geben Sie die Gleichung für die Spannung U_R und die Leistung $P = U\,I$ in Abhängigkeit von der Zeit an. Berechnen Sie den Mittelwert der Leistung während einer Periode; drücken Sie das Ergebnis durch U_0 und R aus.

e) Unter dem Effektivwert einer Wechselspannung versteht man die Gleichspannung U_{eff}, die am selben Widerstand dieselbe Leistung hervorruft wie die Wechselspannung im Mittel. Bestimmen Sie den Zusammenhang zwischen U_{eff} und $U_0 = R\,I_0$.

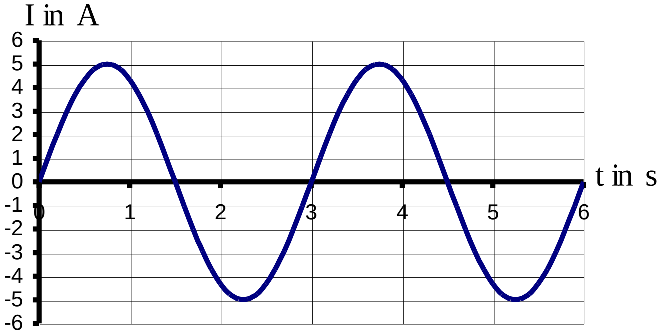
2. Werden zwei sinusförmige Wechselspannungen *gleicher Frequenz* überlagert, so ergibt sich wieder eine sinusförmige Wechselspannung gleicher Frequenz (mit anderer Amplitude und verschobener Phase). Dies kann man dadurch veranschaulichen, dass man die beiden Sinus-Funktionen als Projektion der y-Komponente einer Kreisbewegung ansieht. Diese beiden Kreisbewegungen kann man mit Hilfe von Pfeilen darstellen, deren Länge gleich der Amplitude des Wechselstroms ist (und die sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω um den Ursprung drehen; das wird im Allgemeinen nicht gezeichnet!). Die Phase φ_0 gibt dabei den Winkel an, den sie zur Zeit t = 0 mit der x-Achse einschließen. Amplitude und Phase des gesamten Stroms ergeben sich dann einfach, indem man die beiden Pfeile wie normale Vektoren addiert.

Zeichnen Sie für die folgenden beiden Wechselströme I_1 und I_2 (beide mit T = 3 s)

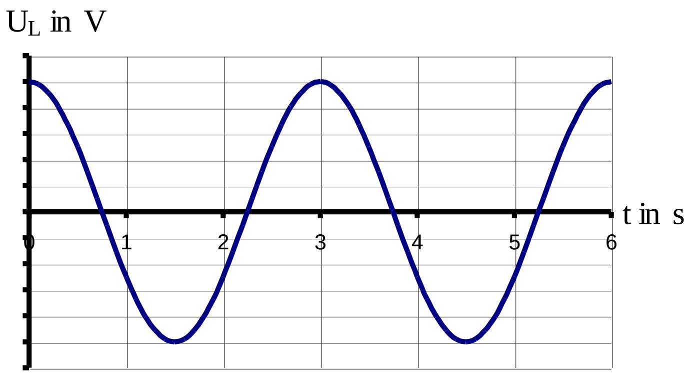
$$I_1(t) = 1{,}0\text{ A} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3\,s}t\right) \text{ und } I_2(t) = 0{,}5\text{ A} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3\,s}t + \frac{\pi}{3}\right)$$

ein solches sog. Zeigerdiagramm und bestimmen Sie daraus die Amplitude des Gesamtstroms $I_{ges}(t) = I_1(t) + I_2(t)$ und dessen Phasenverschiebung gegenüber I_1.

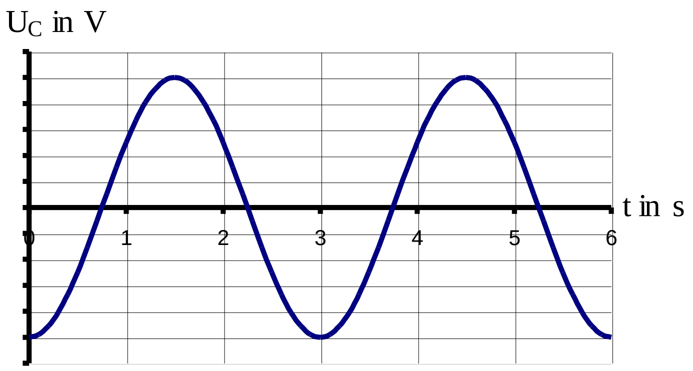
1. a)



b) $U_L(t) = L\,I_0\,\omega\cos(\omega t)$; Amplitude: $U_{L0} = L\,I_0\,\omega$ ➔ Widerstand: $R = L\,\omega$



c) $Q(t) = -\dfrac{I_0}{\omega}\cos(\omega t)$ ➔ $U_C(t) = -\dfrac{I_0}{C\omega}\cos(\omega t)$; Amplitude: $U_{C0} = \dfrac{I_0}{C\omega}$ ➔ Widerstand: $R = \dfrac{1}{C\omega}$

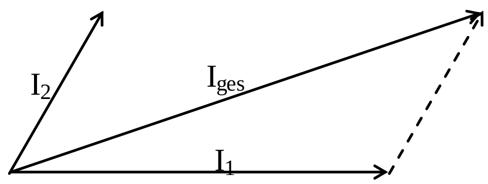


d) $U_R(t) = R\,I_0\sin(\omega t)$; $P(t) = R\,I_0^2\sin^2(\omega t)$; $\overline{P} = \dfrac{1}{\frac{2\pi}{\omega}}\displaystyle\int_0^{2\pi/\omega} R\,I_0^2\sin^2(\omega t)\,dt = \ldots = \dfrac{1}{2}\,R\,I_0^2 = \dfrac{U_0^2}{2R}$

(um das Integral zu berechnen, muss man zunächst die Formel für $\sin^2\alpha$ aus der Formelsammlung (S. 39) benutzen!)

e) Gleichspannung: $P = U_{eff}\,I = \dfrac{U_{eff}^2}{R}$; das soll gleich $\overline{P}$ aus (d) sein ➔ $U_{eff} = \dfrac{U_0}{\sqrt{2}}$

2. Phasen: $\varphi_1 = 0°$; $\varphi_2 = 60°$
Maßstab: 1 cm entspricht 0,2 A



aus der Zeichnung: $I_{ges} \approx 1{,}3$ A; $\varphi \approx 19°$ (bzw. $\approx 0{,}33$ im Bogenmaß) oder rechnerische Lösung:

$$\vec{I}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{I}_2 = 0{,}5\begin{pmatrix} \cos 60° \\ \sin 60° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}25 \\ 0{,}25\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \vec{I}_{ges} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2 = \begin{pmatrix} 1{,}25 \\ 0{,}25\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

➔ Amplitude: $|I_{ges}| = \sqrt{1{,}25^2 + \left(0{,}25\sqrt{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{2} \approx 1{,}3$; Phase: $\tan \varphi_{ges} = \frac{0{,}25\sqrt{3}}{1{,}25} = \frac{\sqrt{3}}{5}$ ➔ $\varphi_{ges} \approx 19°$