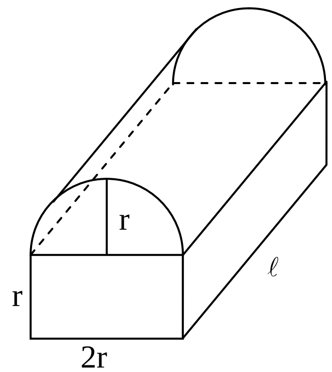
Gruppenarbeit: Anwendungen gebrochenrationaler Funktionen

Gruppe A: Extremwertaufgaben

1. Zeichnen Sie den Graph G der Funktion f: $x \mapsto \frac{4}{x^2+1}$. Welches zur y-Achse symmetrische Dreieck, von dem eine Ecke im Ursprung und die beiden anderen auf G liegen, hat den größten Flächeninhalt?

2. Ein Goldschmied soll ein Kästchen aus Silberblech anfertigen, das ein vorgegebenes Volumen V = $8{,}0 \cdot 10^3$ cm^3 hat und das die Form eines Quaders (Höhe r, Breite 2r und Länge ℓ) mit einem aufgesetzten Halbzylinder (Radius r, Länge ℓ); siehe Skizze:



a) Stellen Sie die Oberfläche des Kästchens als Funktion von r und V dar.

(mögliches Ergebnis: $O(r) = (\pi + 4)r^2 + \frac{2V}{r}$)

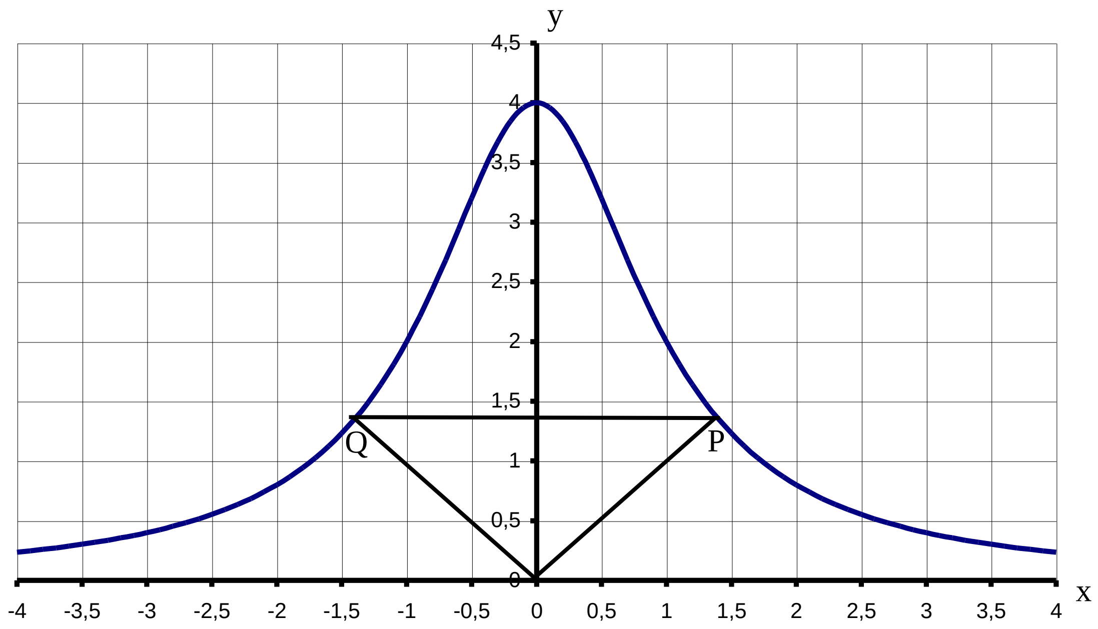
b) Bestimmen Sie r, ℓ und O so, dass die Materialkosten am geringsten sind.
(*Technik 12. Klasse: vgl. Buch 236/9 (2. Auflage) bzw. 2 (1. Auflage); vgl. auch 2002-AII/2*)

Zusatzaufgabe (wenn noch Zeit ist):
3. Julius Pflüger stellte im Jahre 1915 eine „Schönheitsbedingung“ für „einfache geometrische Gebilde“ auf. Danach ist eine geschlossene Figur mit gegebenem Umfang dann „am schönsten“, wenn sie eine möglichst große Fläche begrenzt. Weil ähnliche Figuren dasselbe Schönheitsmaß haben sollten, definierte er den Quotienten

$$T = \frac{A}{U^2}$$

(A: Flächeninhalt, U: Umfang) als „ästhetische Maßzahl“.
a) Berechnen Sie T für ein gleichseitiges Dreieck, ein regelmäßiges Sechseck und einen Kreis.
b) Bestimmen Sie rechnerisch, welches Rechteck mit der festen Länge a und der Breite x „am schönsten“ ist.

1.



Punkte: P(a; f(a)); Q(–a; f(a)) (Graph ist symmetrisch!); Flächeninhalt: A = $\frac{1}{2}gh$

$g=\overline{QP}=2a$; $h=f(a)$ ➔ A = a·f(a) = $\frac{4a}{a^2+1}$; A'(a) = $\frac{-4a^2+4}{(a^2+1)^2}$; A''(a) = $\frac{8a^3-24a}{(a^2+1)^3}$

A'(a) = 0 ➔ $a_1 = 1$ ($a_2 = -1$); A''(1) = –2 < 0 ➔ Maximum; Randwerte: A(0) = 0; $\lim\limits_{a\to\infty}$ A(a) = 0

➔ absolutes Maximum für a = 1 (h = 2)

2. a) V = V_{Quader} + 0,5 $V_{Zylinder}$ = $2r^2\ell + 0{,}5\pi r^2\ell = 0{,}5r^2\ell\cdot(\pi+4)$ ➔ $\ell = \frac{2V}{(\pi+4)r^2}$

O = A_{unten} + 2·A_{vorne} + 2·A_{rechts} + 0,5 $M_{Zylinder}$ = $2r\cdot\ell + 2\cdot(2r\cdot r + 0{,}5\pi r^2) + 2\cdot r\cdot\ell + \pi r\ell = (\pi+4)r^2 + (\pi+4)r\ell$

ℓ von oben einsetzen ➔ O(r) aus Angabe

b) O'(r) = $2(\pi+4)r - \frac{2V}{r^2}$; O''(r) = $2(\pi+4) + \frac{4V}{r^3}$ > 0 für alle r > 0

O' = 0 ➔ $r_1 = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi+4}} \approx 10{,}4$ cm; O'' > 0 ➔ relatives Minimum; Randwerte: $\lim\limits_{r\to 0}$ O(r) = $\lim\limits_{r\to\infty}$ O(r) = ∞

➔ absolutes Minimum bei r_1; $\ell \approx 20{,}8$ cm

3. a) gleichseitiges Dreieck: T = $\frac{\sqrt{3}}{36} \approx 0{,}048$; regelmäßiges Sechseck: T = $\frac{\sqrt{3}}{24} \approx 0{,}072$;

Kreis: T = $\frac{1}{4\pi} \approx 0{,}080$ b) T(x) = $\frac{ax}{(2a+2x)^2}$ ➔ am „schönsten“ für x = a (Quadrat)

Gruppenarbeit: Anwendungen gebrochenrationaler Funktionen

Gruppe B: Elektrische Bauteile

1. Werden zwei Kondensatoren der Kapazitäten C_1 und C_2 in Reihe geschaltet, so gilt für die Kapazität C_{ges} der gesamten Anordnung:

$$\frac{1}{C_{ges}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Zu einem Kondensator mit der Kapazität C_0 = 1,5 nF wird ein zweiter mit einer variablen Kapazität C zwischen 1 nF und 6 nF geschaltet. Geben Sie mit Hilfe der obigen Formel den Funktionsterm der Funktion $C_{ges}(C)$ an, die jedem C die gesamte Kapazität der Anordnung zuordnet (Einheiten können hier ignoriert werden), und zeichnen Sie den Graph dieser Funktion. Ermitteln Sie die Grenzwerte für $C \to 0$ und $C \to \infty$ und interpretieren Sie diese im Sinne der Aufgabenstellung.

2. Batterien setzen im Allgemeinen bereits in ihrem Inneren dem Stromfluss einen gewissen Widerstand entgegen; man spricht vom „Innenwiderstand" R_i. Ohne Belastung misst man einer Batterie die Leerlaufspannung U_0, schließt man dagegen einen „Stromverbraucher" mit Widerstand R an, so sinkt die Klemmenspannung U wegen des Innenwiderstands unter U_0. Für U und die Stromstärke I gilt dabei:

$$U(R) = \frac{U_0 R}{R + R_i} \quad \text{und} \quad I(R) = \frac{U_0}{R + R_i}$$

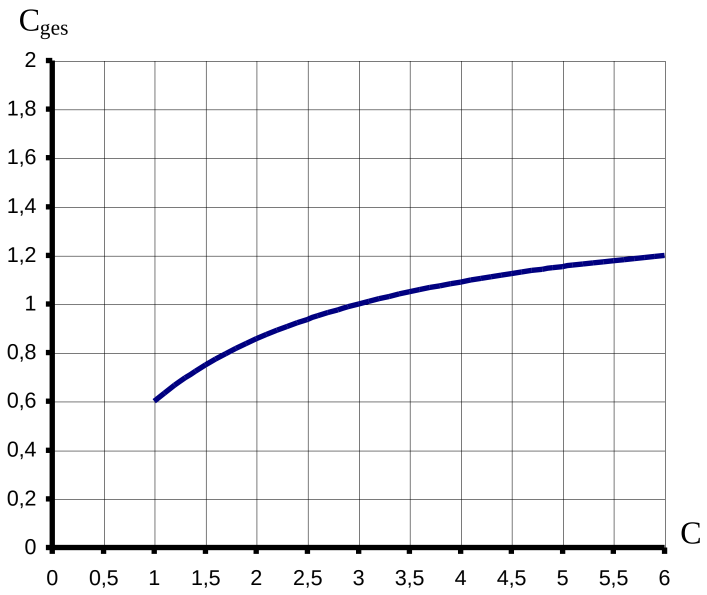
Stellen Sie eine Gleichung auf, die angibt, wie die elektrische Leistung P = U·I vom „Verbraucher-" Widerstand R abhängt. Zeigen Sie dann allgemein, dass P(R) bei R = R_i ein (relatives) Maximum hat; verwenden Sie dabei als hinreichendes Kriterium den Vorzeichenwechsel der 1. Ableitung.

3. Für die Induktivität L einer (nicht zu kurzen) Zylinderspule gilt in Abhängigkeit von ihrem Radius r:

$$L(r) = \frac{\mu_0 N^2 \pi\, r^2}{\ell + r/1{,}1}$$

Dabei ist $\mu_0 = 4\,\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{H}{m}$ die sogenannte Induktionskonstante, N die Anzahl der Windungen und ℓ die Länge der Spule; 1 H(enry) ist die Einheit der Induktivität. Zeichnen Sie den Graph von L(r) für N = 500 und ℓ = 10 cm (r in cm (!), von 0 bis 5).

1. $C_{ges}(C) = \dfrac{1{,}5C}{1{,}5+C}$



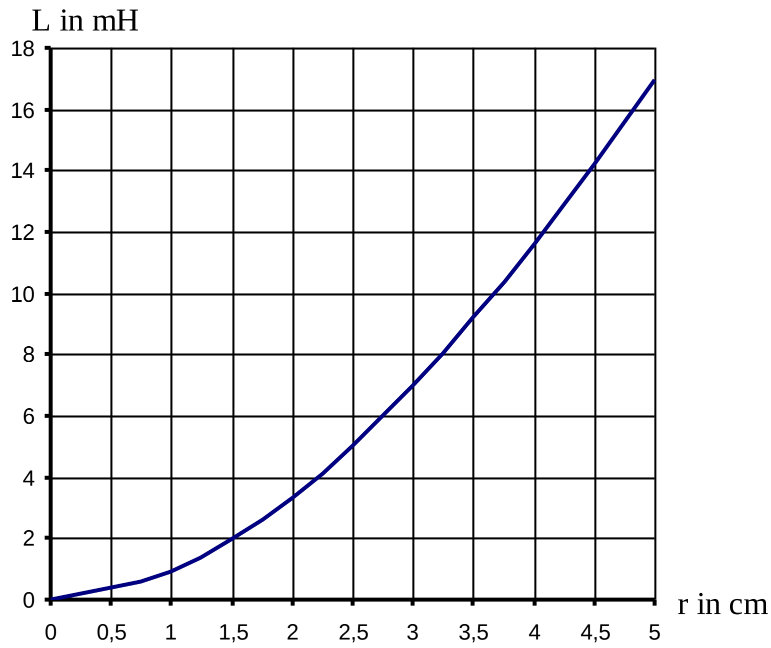
$\lim\limits_{C\to 0} C_{ges} = 0$ (hat der zweite Kondensator keine Kapazität, so hat die gesamte Anordnung keine);

$\lim\limits_{C\to\infty} C_{ges} = 1{,}5 = C_0$ (hat der zweite Kondensator eine sehr (unendlich) große Kapazität, so ist die Kapazität der gesamten Anordnung gleich der des ersten Kondensators)

2. $P(R) = \dfrac{U_0^2 R}{(R+R_i)^2}$; $P'(R) = \dfrac{U_0^2 (R_i - R)}{(R+R_i)^3}$ ➔ P' hat bei $R = R_i$ eine Nullstelle mit VZ von + nach –

➔ relatives Maximum bei $R = R_i$ (da $P(R_i) > 0$, $P(0) = 0$ und $\lim\limits_{R\to\infty} P(R) = 0$, sogar absolut!)

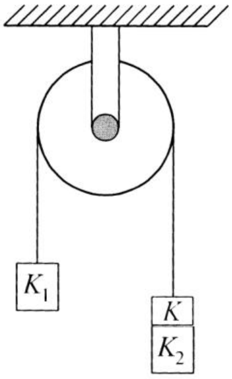
3. $L(r) \approx 987 \dfrac{(r/100)^2}{0{,}1 + r/110}$ (r in cm, L in mH)



Gruppenarbeit: Anwendungen gebrochenrationaler Funktionen

Gruppe C: Mechanik

1. Bei einer sogenannten „*Atwood'*schen Fallmaschine" sind zwei Körper gleicher Masse durch einen Faden über eine Rolle verbunden. Durch Anhängen eines Zusatzkörpers der Masse m wird eine beschleunigende Kraft F = mg geschaffen, die den Körpern der Gesamtmasse $2m_0 + m$ die Beschleunigung a erteilt:



Es gilt also:

$$a\,(2m_0 + m) = m\,g,$$

wobei $g = 9{,}81\ m/s^2$ die Gravitationsbeschleunigung ist. Für festes m_0 ist a also eine Funktion von m; betrachtet man m_0 als Parameter, so erhält man eine Funktionenschar:

$$a_{m_0}(m) = g \cdot \frac{m}{2m_0 + m}$$

Durch geeignete Wahl von m kann man jede gewünschte Beschleunigung a < g erhalten.

a) Zeichnen Sie den Graph von $a_{m0}(m)$ für verschiedene Massen $m_0 \in \{0{,}50\ kg; 1{,}0\ kg; 2{,}0\ kg\}$ und m von 0 bis 5 kg.

b) Berechnen Sie, für welche Massen m die Beschleunigung a jeweils $5\ m/s^2$ ist.

2. Fährt ein Boot mit Eigengeschwindigkeit v_B zunächst flussaufwärts gegen die Strömung mit der Geschwindigkeit v_S und danach flussabwärts dieselbe Strecke wieder zurück, so gilt für seine Durchschnittsgeschwindigkeit v:

$$v = \frac{v_B^2 - v_S^2}{2v_B}$$

Rechnen Sie im Folgenden mit $v_S = 2$ m/s; Einheiten können ignoriert werden.

a) Geben Sie eine im Sachzusammenhang sinnvolle Definitionsmenge für die Funktion $v(v_B)$ an. Berechnen Sie dann die Grenzwerte an den Rändern des Definitionsbereichs und interpretieren diese im Sachzusammenhang.

b) Zeichnen Sie den Graph von $v(v_B)$ für v_B zwischen 2 und 6 (m/s).

Bitte wenden!

3. Die Bremskraft B einer Wirbelstrombremse ist als Funktion der Geschwindigkeit $v > 0$ gegeben durch

$$B(v) = \frac{a\,v}{b + v^2}$$

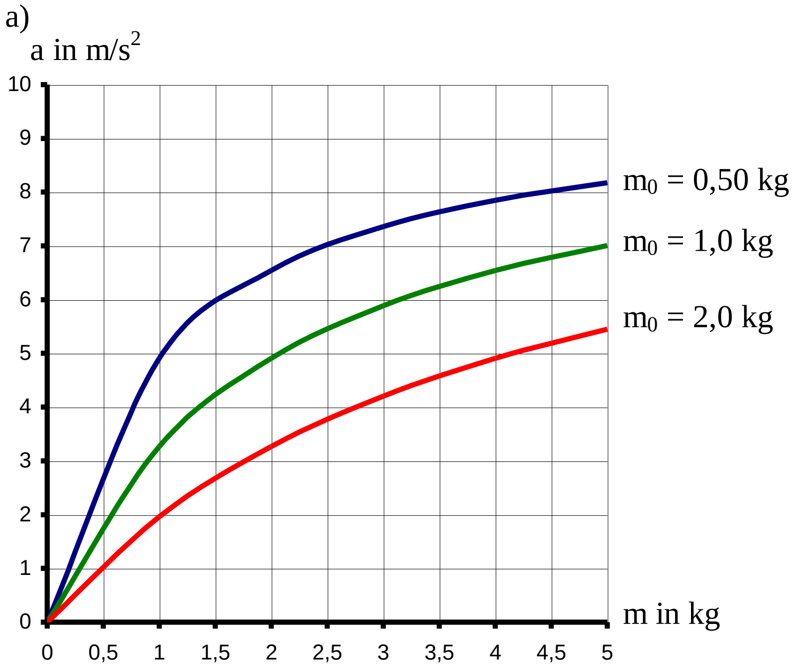
mit Konstanten $a > 0$ und $b > 0$; Einheiten werden im Folgenden ignoriert.

a) Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte $B(v)$ für $v \to 0$ und für $v \to +\infty$ und erläutern Sie Ihre Ergebnisse im gegebenen Sachzusammenhang.

b) Untersuchen Sie, bei welcher Geschwindigkeit v_m die Bremskraft ihren größten Wert besitzt, und berechnen Sie diese maximale Bremskraft $B(v_m)$ in Abhängigkeit von a und b; verwenden Sie dabei als hinreichendes Kriterium den Vorzeichenwechsel der 1. Ableitung.

(Technik: vgl. Buch (2. Auflage) 236/10; Nachtermin 2000)

1. a)



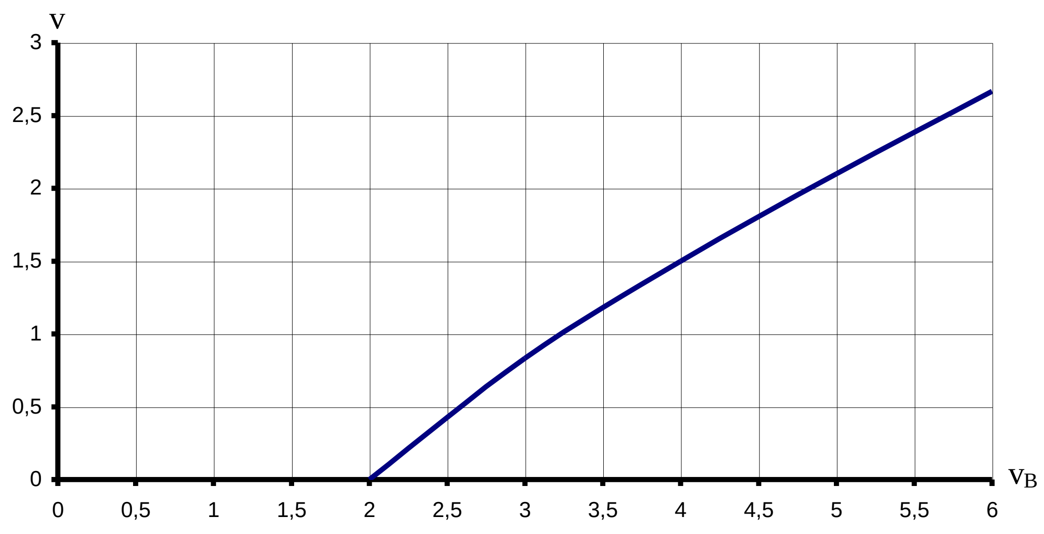
b) ≈1,04 kg; ≈2,08 kg; ≈4,16 kg

2. a) D = [2; ∞[

$\lim\limits_{v_B \to 2} v(v_B) = 0$ (wenn die Geschwindigkeit des Bootes gleich der Strömungsgeschwindigkeit ist, so kommt es nicht vorwärts)

$\lim\limits_{v_B \to \infty} v(v_B) = \infty$ (wenn das Boot unendlich schnell ist, so hat die Strömung keinen Einfluss mehr, das Boot kommt unendlich schnell vorwärts)

b)



3. a) $\lim\limits_{v \to 0} B(v) = \lim\limits_{v \to \infty} B(v) = 0$ ➔ wenn der Zug steht oder sehr (unendlich) schnell ist, so hat die Bremse keine Bremskraft

b) $B'(v) = = \dfrac{ab - av^2}{(b+v^2)^2} = \dfrac{a(\sqrt{b}+v)(\sqrt{b}-v)}{(b+v^2)^2}$; $B'(v_m) = 0$ ➔ $v_m = \sqrt{b}$; B' wechselt bei v_m das VZ von + nach – ➔ relatives Maximum; mit Randwerten (siehe a): sogar absolutes Maximum;

$B(v_m) = \dfrac{a\sqrt{b}}{2b} = \dfrac{a}{2\sqrt{b}}$

Gruppenarbeit: Anwendungen gebrochenrationaler Funktionen

Gruppe D: Ideale und reale Gase

1. Bei idealen Gasen gilt folgender Zusammenhang zwischen ihrem Volumen V und ihrem Druck P, wenn die Temperatur konstant gehalten wird („isotherme Zustandsänderung“):

$$P_{iso}(V) = \frac{k}{V}$$

mit einer Konstanten k. Wird dagegen das Volumen sehr schnell geändert („adiabatische Zustandsänderung), so ändert sich im allgemeinen die Temperatur. Zwischen Volumen und Druck gilt dann der Zusammenhang

$$P_{adia}(V) = \frac{K}{V^{1,4}}$$

mit einer anderen Konstanten K. Zeichnen Sie für $k = 2{,}5\ \text{kPa}\cdot\text{m}^3$ und für $K = 2{,}5\ \text{kPa}\cdot\text{m}^{4,2}$ die Graphen der beiden Funktionen $P_{iso}(V)$ und $P_{adia}(V)$ in dasselbe Koordinatensystem (V von 0,5 bis 2,5 m^3)

2. Ideale Gase kommen in Natur und Technik eigentlich nicht vor (sind aber oft eine gute Näherung). Ein reales Gas wird besser durch die van-der-Waals-Gleichung beschrieben:

$$\left(P + \frac{a\,n^2}{V^2}\right)(V - n\,b) = nRT \quad \left(\text{für } V > n\,b,\ T > \frac{a}{4Rb}\right).$$

Dabei ist a ein Maß für die Wechselwirkungen zwischen den Gasteilchen und b für ihr Eigenvolumen. Um die Gleichung zu vereinfachen, führt man die Abkürzungen $p = \frac{b^2P}{a}$, $v = \frac{V}{nb}$ und $t = \frac{bRT}{a}$ ein (dies sind einheitenlose Größen); dann bleibt

$$\left(p + \frac{1}{v^2}\right)\cdot(v-1) = t \quad \left(\text{für } v > 1 \text{ und } t > \tfrac{1}{4}\right).$$

a) Zeigen Sie, dass sich für den Druck p in Abhängigkeit vom Volumen v daraus ergibt:

$$p(v) = \frac{t\cdot v^2 - v + 1}{v^2\cdot(v-1)} = \frac{t\cdot v^2 - v + 1}{v^3 - v^2}.$$

b) Stellen Sie die Isothermen des realen Gases (also jeweils den Graph von p(v)) für $t = 0{,}26$, $t = \tfrac{8}{27}$ und $t = 0{,}4$ in einem gemeinsamen Koordinatensystem grafisch dar ($0 \le v \le 10$, $0 \le p \le 0{,}1$).

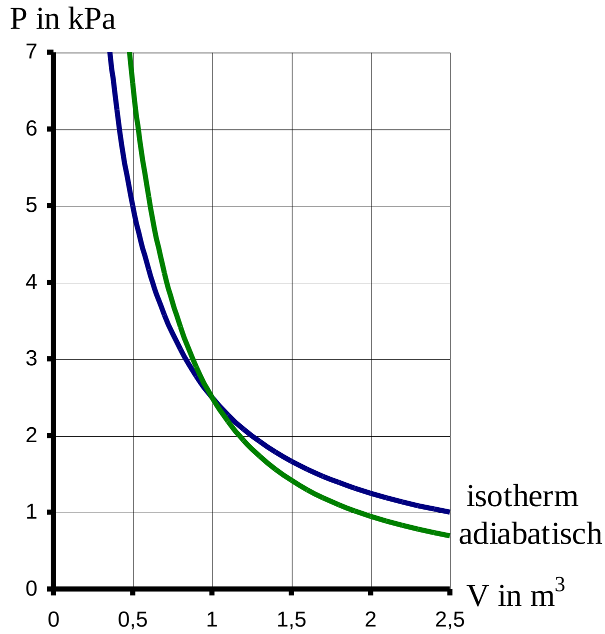
Man könnte nun versuchen, die Stellen mit waagrechter Tangente wie üblich zu finden: Die Gleichung $p'(v) = 0$ nach v auflösen. Das ist aber (selbst mit CAS!) sehr umständlich; stattdessen wird hier etwas anders weiter gerechnet.

c) Zeigen Sie, dass bei den Stellen mit waagrechter Tangente von p gelten muss:

$$2\frac{(v-1)^2}{v^3} = t$$

d) Finden Sie das absolute Maximum der Funktion f mit $f(v) = 2\frac{(v-1)^2}{v^3}$; $v > 1$. Begründen Sie damit, dass p in Abhängigkeit von v keine Extremstellen haben kann, wenn $t > \tfrac{8}{27}$ ist.

1.

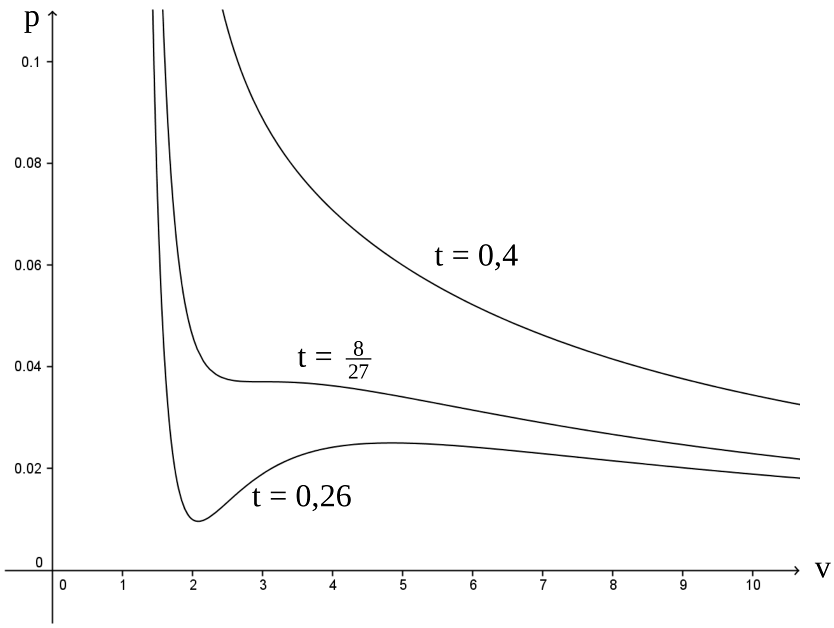


2. a) Klammern ausmultiplizieren: $pv + \frac{1}{v} - p - \frac{1}{v^2} = t$

alles ohne p nach rechts, links p ausklammern: $p\,(v-1) = t - \frac{1}{v} + \frac{1}{v^2} = \frac{t \cdot v^2 - v + 1}{v^2}$

durch (v – 1) teilen ➔ $p(v) = \frac{t \cdot v^2 - v + 1}{v^2 \cdot (v-1)}$; dann nur noch im Nenner die Klammer auflösen

b)



c) $p'(v) = \frac{dp}{dv} = \frac{(2tv-1)\cdot(v^3-v^2)-(tv^2-v+1)\cdot(3v^2-2v)}{(v^3-v^2)^2}$

$= \frac{(2tv^4 - v^3 - 2tv^3 + v^2) - (3tv^4 - 3v^3 + 3v^2 - 2tv^3 + 2v^2 - 2v)}{(v^3-v^2)^2} = \frac{-tv^4 + 2v^3 - 4v^2 + 2v}{(v^3-v^2)^2}$

Stellen mit waagrechter Tangente: $\frac{dp}{dv} = 0$ ➔ $-t\,v^4 + 2v^3 - 4v^2 + 2v = 0$

➔ $2v^3 - 4v^2 + 2v = t\,v^4 \mid : v \neq 0$ ➔ $2\,(v^2 - 2v + 1) = t\,v^3$ ➔ $2\frac{(v-1)^2}{v^3} = t$

d) $f\,'(v) = 2\frac{2(v-1)\cdot 1\cdot v^3 - (v-1)^2\cdot 3v^2}{v^6} = 2\frac{(2v^4 - 2v^3) - (3v^4 - 6v^3 + 3v^2)}{v^6}$

$= 2\frac{-v^4 + 4v^3 - 3v^2}{v^6} = 2\frac{v^2\cdot\left(-v^4 + 4v^3 - 3v^2\right)}{v^6} = 2\frac{-v^2 + 4v - 3}{v^4}$

Stellen mit waagrechter Tangente: $f\,'(v) = 0$ ➔ $-v^2 + 4v - 3 = 0$

➔ $v_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot(-1)\cdot(-3)}}{2\cdot(-1)} = \frac{-4 \pm 2}{-2}$ ➔ $v_1 = 1 \notin D_f$; $v_2 = 3$

Der Nenner von $f\,'(v)$ ist immer positiv; der Zähler stellt eine nach unten geöffnete Parabel dar, wechselt also bei 1 das VZ von – nach + und bei 3 von + nach – ➔ bei 1 wäre ein Minimum, bei 3 ist ein Maximum. $f(3) = \frac{8}{27}$; außerdem gilt $f(v) \to 0$ für $v \to 1$ und $f(v) \to 0$ für $v \to \infty$ ➔ Der Term $f(v) = 2\frac{(v-1)^2}{v^3}$ nimmt für $v > 1$ höchstens den Wert $\frac{8}{27}$ an. ➔ Die Gleichung $2\frac{(v-1)^2}{v^3} = t$ (mit $v > 1$) hat für $t > \frac{8}{27}$ keine Lösungen; also hat dann $p(v)$ keine Extremstellen.

(Man kann auch noch zeigen, dass sich für $t = \frac{8}{27}$ ein Terrassenpunkt ergibt, für $t < \frac{8}{27}$ jeweils erst ein Minimum, dann ein Maximum.)

Gruppenarbeit: Anwendungen gebrochenrationaler Funktionen

Gruppe E: Chemie und Optik

1. Die Stoffmengenkonzentration c eines gelösten Stoffes ist bei fester Stoffmenge n eine Funktion des Volumens V der Lösung:

$$c(V) = \frac{n}{V}$$

Gegeben sind 126 g Salpetersäure (HNO_3); diese wird in Wasser gelöst. 1 Mol Salpetersäure hat eine Masse von 63 g. Bestimmen Sie die Stoffmenge und geben Sie die Stoffmengenkonzentration c(V) in Abhängigkeit vom Wasservolumen V an. Zeichnen Sie den Graph von c(V) für V von 1 bis 5 Liter.

2. Bei einer Abbildung durch eine dünne Linse der Brennweite f gilt:

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad \text{(„Linsengleichung“);}$$

dabei ist g $\geq$ 0 der Abstand vom abzubildenden Gegenstand zur Linse (Gegenstandsweite) und b der Abstand von der Linse zum (scharfen) Bild (Bildweite). Im Folgenden sei zunächst f = 5 cm; Einheiten können ignoriert werden.

a) Stellen die Gleichung der Funktion b(g) auf, die jeder Gegenstandsweite ihre Bildweite zuordnet. Geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge an. Berechnen Sie die Grenzwerte an den Rändern des Definitionsbereichs und interpretieren Sie diese im Sachzusammenhang.

b) Ermitteln Sie, für welche Werte von g die Bildweite b negativ ist, und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

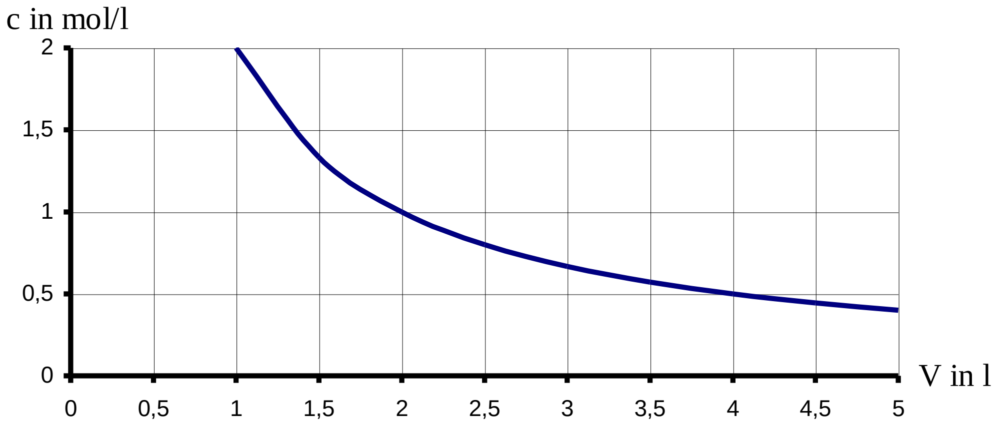
c) Zeichnen Sie den Graph für g zwischen 0 und 8.

d) Zwischen Gegenstand und Bild soll ein Abstand von 1 m sein. Berechnen Sie, wie groß die Gegenstandsweite sein muss, damit ein scharfes Bild entsteht. Interpretieren Sie die beiden Lösungen.

e) Zwischen Gegenstand und Bild soll wieder ein Abstand von 1 m sein; nun soll aber eine andere Linse verwendet werden. Berechnen Sie, welche Brennweite die Linse haben muss und wo sie stehen muss, damit es nur eine Möglichkeit für ein scharfes Bild gibt.

(Technik: vgl. auch 2011/AII-3)

1. $n(HNO_3) = 2\ \text{mol} \Rightarrow c(V) = \dfrac{2\ \text{mol}}{V}$



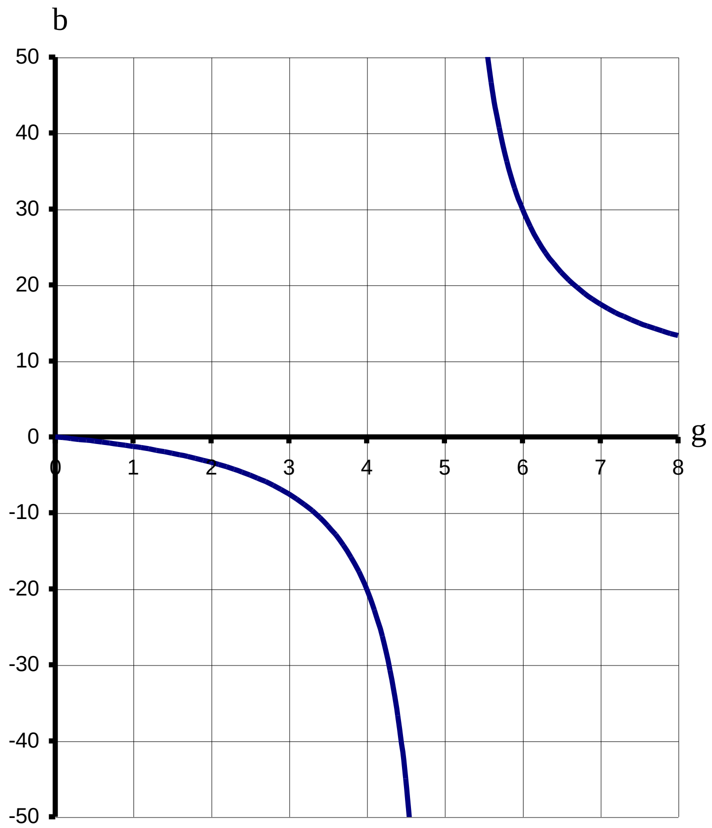
2. a) $b(g) = \dfrac{5g}{g-5}$; $\quad \mathbb{D} =]5;\infty[$

$\lim\limits_{g\to 5} b(g) = \infty$ (Gegenstand im Brennpunkt: Bild unendlich weit weg)

$\lim\limits_{g\to \infty} b(g) = 5$ (Gegenstand unendlich weit weg: Bild im Brennpunkt)

b) $b < 0$ für $0 < g < 5$ (Gegenstand innerhalb Brennweite: virtuelles Bild hinter der Linse)

c)



d) $100 - g = \dfrac{5g}{g-5}$ ➔ $g_{1,2} = 50 \pm 20\sqrt{5}$ ➔ $g_1 \approx 94{,}7$, $b_1 \approx 5{,}3$ oder $g_2 \approx 5{,}3$, $b_2 \approx 94{,}7$

bei der ersten Stellung der Linse wird das Bild verkleinert dargestellt, bei der zweiten Stellung vergrößert (beide Mal um einen Faktor von etwa 18)

e) $100 - g = \dfrac{fg}{f-5}$ hat nur eine Lösung für f = 25 (➔ b = g = 50, die Linse steht genau in der Mitte, das Bild wird in Originalgröße abgebildet)