Gruppenarbeit: Anwendungen des Integrals

Gruppe A: Weg und Geschwindigkeit

Die erste Ableitung der Zeit-Ort-Funktion x(t) der Bewegung eines Körpers ergibt bekanntlich die Zeit-Geschwindigkeits-Funktion v(t), deren erste Ableitung wiederum die Zeit-Beschleunigungs-Funktion a(t).

Umgedreht gilt also nach dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung:

$$\int_0^t a(t')dt' = \int_0^t \dot{v}(t')dt' = v(t) - v(0) \quad \text{und} \quad \int_{t_0}^t v(t')dt' = \int_{t_0}^t \dot{x}(t')dt' = x(t) - x(0);$$

das Integral über die Beschleunigung ergibt also die Geschwindigkeitsänderung (und wenn die Geschwindigkeit zur Zeit 0 bekannt ist, damit auch die zu einer beliebigen Zeit t), das Integral über die Geschwindigkeit ergibt die Ortsveränderung (und wenn der Ort zur Zeit 0 bekannt ist, damit auch den zu einer beliebigen Zeit t).

1. Ein Körper bewegt sich gleichförmig mit einer Geschwindigkeit von –5 m/s; zu Beginn (t = 0) befindet er sich 20 m vom Ursprung entfernt. Geben Sie die Zeit-Orts- und Zeit-Geschwindigkeitsfunktion an (vgl. Physik Klasse 11!) und vergleichen Sie mit dem Ergebnis, das man mittels der obigen Formeln erhält (*Tipp:* eine gleichförmige Bewegung ist kräftefrei, also ist die Beschleunigung a(t) = 0).

2. Auf einen Körper wirke die <u>konstante</u> Beschleunigung a(t) = –g in y-Richtung (y-Achse nach oben). Ermitteln Sie die Zeit-Geschwindigkeits- und Zeit-Orts-Funktionen v(t) und y(t); benutzen Sie dabei für die Geschwindigkeit und den Ort zur Zeit t = 0 die Bezeichnungen v_0 bzw. y_0. (senkrechter Wurf)

3. Ein PKW wird aus der Ruhe vom Ursprung der x-Achse an beschleunigt; dabei gilt für die Beschleunigung a in Abhängigkeit von der Zeit t:

$$a(t) = 5\,\tfrac{m}{s^2} - 0{,}2\,\tfrac{m}{s^3}\cdot t$$

a) Ermitteln Sie die Zeit-Geschwindigkeits- und die Zeit-Orts-Funktion.
b) Warum nimmt die Beschleunigung mit der Zeit ab, auch wenn man konstant Gas gibt? (physikalische Begründung!) Warum ist die Beschreibung hier für t > 25 s nicht realistisch?

wenn noch Zeit ist:
4. Eine realistischere Beschreibung ist gegeben durch

$$a(t) = \begin{cases} 5\,\frac{m}{s^2} - 0{,}2\,\frac{m}{s^3}\cdot t & \text{für } 0 \le t \le 25\,\text{s} \\ 0 & \text{für } t > 25\,\text{s} \end{cases}$$

a) Ermitteln Sie die Zeit-Geschwindigkeits- und Zeit-Orts-Funktionen; unterscheiden Sie dabei $0 \le t \le 25$ s (verwenden Sie Ihre Ergebnisse aus Aufgabe 3!) und t > 25 s. (*eine Skizze des Zeit-Beschleunigungsdiagramms kann hilfreich sein!)*
b) Zeichnen Sie ein Zeit-Ort-Diagramm für $0 \le t \le 50$.

1. mit Wissen aus Klasse 11: $v(t) = -5\ \text{m/s}$; $x(t) = -5\ \text{m/s} \cdot t + 20\ \text{m}$

mit den Formeln: $v(t) = -5\ \text{m/s} + \int_0^t 0\,dt' = -5\ \text{m/s}$; $x(t) = 20\ \text{m} + \int_0^t (-5\ \text{m/s})\,dt' = 20\ \text{m} - 5\ \text{m/s} \cdot t$

2. $v(t) = v_0 + \int_0^t (-g)\,dt' = v_0 - g\,t$; $x(t) = x_0 + \int_0^t (v_0 - g\,t')\,dt' = x_0 + v_0\,t - \frac{1}{2} g\,t^2$

3. a) $v_P(t) = 0 + \int_0^t (5\,\frac{m}{s^2} - 0{,}2\,\frac{m}{s^3} \cdot t')\,dt' = 5\,\frac{m}{s^2} \cdot t - 0{,}1\,\frac{m}{s^3} \cdot t^2$

$x_P(t) = 0 + \int_0^t (5\,\frac{m}{s^2} \cdot t' - 0{,}1\,\frac{m}{s^3} \cdot t'^2)\,dt' = 2{,}5\,\frac{m}{s^2} \cdot t^2 - \frac{1}{30}\,\frac{m}{s^2} \cdot t^3$

b) mit zunehmender Geschwindigkeit nimmt die Luftwiderstandskraft zu; diese wirkt der Beschleunigungskraft des Autos entgegen ➔ die Beschleunigung nimmt ab; für $t > 25$ s hätte man eine negative Beschleunigung, also eine Abbremsung, was natürlich wenig Sinn ergibt (statt dessen wird eine konstante Geschwindigkeit erreicht, d. h. $a = 0$ für $t > 25$ s, s. Aufgabe 4!)

4. a) für $t > 25$ s:

$v_P(t) = 0 + \int_0^t a(t')\,dt' = \int_0^{25\,s} (5\,\frac{m}{s^2} - 0{,}2\,\frac{m}{s^3} \cdot t')\,dt' + \int_{25\,s}^t 0\,dt' = 62{,}5\,\frac{m}{s}$

$x_P(t) = 0 + \int_0^t v_P(t')\,dt' = \int_0^{25\,s} \left(5\,\frac{m}{s^2} \cdot t - 0{,}1\,\frac{m}{s^3} \cdot t^2\right) dt' + \int_{25\,s}^t 62{,}5\,\frac{m}{s}\,dt' = 1041\,\tfrac{2}{3}\ \text{m} + 62{,}5\,\frac{m}{s} \cdot (t - 25\ \text{s})$

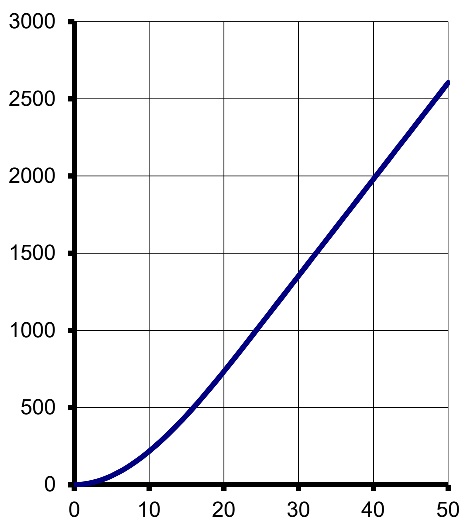
$= 62{,}5\,\frac{m}{s} \cdot t - 520\,\tfrac{5}{6}\ \text{m}$

also mit den Ergebnissen aus Aufgabe 3 insgesamt:

$$v_P(t) = \begin{cases} 5\,\frac{m}{s^2} \cdot t - 0{,}1\,\frac{m}{s^3} \cdot t^2 & \text{für } 0 \le t \le 25\,\text{s} \\ 62{,}5\,\frac{m}{s} & \text{für } t > 25\,\text{s} \end{cases}$$

$$x_P(t) = \begin{cases} 2{,}5\,\frac{m}{s^2} \cdot t^2 - \frac{1}{30}\,\frac{m}{s^3} \cdot t^3 & \text{für } 0 \le t \le 25\,\text{s} \\ 62{,}5\,\frac{m}{s} \cdot t - 520\,\tfrac{5}{6}\,m & \text{für } t > 25\,\text{s} \end{cases}$$

b)



Gruppenarbeit: Anwendungen des Integrals

Gruppe B: Kraft und Arbeit

Bei einer konstanten Kraft F, die auf einer Strecke x (und parallel dazu) wirkt, gilt bekanntlich für die geleistete Arbeit W:

$$W = F \cdot x$$

Die meisten Kräfte sind aber nicht konstant (Beispiele: Federkraft, Gravitationskraft, elektrische Kraft), sondern hängen ihrerseits vom Ort x ab, wir haben also eine Funktion F(x).

Aber man kann die Arbeit natürlich trotzdem näherungsweise berechnen: Aus der 11. Klasse Physik ist (hoffentlich!) bekannt, dass in solchen Fällen die Arbeit gleich der Fläche unter der Kurve im x-F-Diagramm ist. Das kann man folgendenmaßen begründen: Wir nehmen z. B. an, dass die Kraft jeweils auf einer Strecke von 10 cm ungefähr konstant bleibt (für z. B. die Gravitationskraft der Erde ist das eine sehr gute Näherung – für Federn sicher weniger...). Dann gilt für die geleistete Arbeit, wenn man sich insgesamt 30 cm weit bewegt:

$$W \approx F(0) \cdot 10\,\mathrm{cm} + F(10\,\mathrm{cm}) \cdot 10\,\mathrm{cm} + F(20\,\mathrm{cm}) \cdot 10\,\mathrm{cm}$$

Nimmt man allgemein an, dass die Kraft jeweils auf einer Strecke Δx ungefähr konstant bleibt, so ergibt sich für die Arbeit:

$$W \approx \sum_{k=1}^{n} F(x_k) \cdot \Delta x$$

Will man die geleistete Arbeit möglichst genau haben, so muss man die Wegstrecken möglichst klein machen, also den Grenzübergang Δx → 0 durchführen; dann wird aus der Summe ein Integral:

$$\boxed{W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx}$$

(Beachten Sie: Hier ist F die Kraft, die aufgewendet wird, um ein Objekt <u>gegen</u> eine äußere Kraft zu bewegen – <u>nicht</u> diese äußere Kraft selbst!)

1. Begründen Sie rechnerisch, dass zum Spannen einer Feder mit Federkonstante D von der Dehnung x_1 zur Dehnung x_2 die Arbeit

$$W = \frac{1}{2}\ D \left((x_2)^2 - (x_1)^2 \right)$$

nötig ist (verwenden Sie das Hooke'sche Gesetz F(x) = D x). Berechnen Sie diese Arbeit für D = 5 N/cm, x_1 = 1 cm, x_2 = 3 cm.

2. Für die Gravitationskraft zwischen zwei Körpern der Massen m_1 und m_2, deren Mittelpunkte den Abstand r voneinander haben, gilt:

$$F(r) = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \text{ (Newtonsches Gravitationsgesetz),}$$

wobei $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}$ die Gravitationskonstante ist. Berechnen Sie auf zwei Dezimalen genau, welche Arbeit (in GJ) verrichtet werden muss, um einen Satelliten der Masse m_1 = 100 kg von der Erdoberfläche ($r_1 = 6{,}4 \cdot 10^6$ m) in eine Umlaufbahn mit $r_2 = 5 \cdot 10^7$ m zu befördern (Erdmasse: $m_2 = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg). (*Tipp:* Leiten Sie zunächst eine allgemeine Formel für die Arbeit im Gravitationsfeld her und setzen Sie erst dann die Zahlenwerte ein; verwenden Sie das unbestimmte Integral $\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + C$)

Bitte wenden!

3. Für die elektrische Kraft zwischen zwei Körpern der Ladungen Q_1 und Q_2, deren Mittelpunkte den Abstand r voneinander haben, gilt:

$$F(r) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{r^2} \text{ (Coulombsches Gesetz),}$$

wobei $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{N\,m}^2}$ die sogenannte elektrische Feldkonstante ist. Geben Sie mit Hilfe Ihrer Ergebnisse in (2) eine allgemeine Formel für die Arbeit an, die benötigt wird, um zwei geladene Körpern vom Abstand r_1 in den Abstand r_2 voneinander zu bringen (vgl. Formelsammlung Physik!). Berechnen Sie diese Arbeit (in GJ) auf eine Dezimale genau für $Q_1 = 1$ C, $Q_2 = -1$ C, $r_1 = 10$ cm und $r_2 = 1{,}0$ m. Was ergibt sich, wenn r_2 gegen unendlich geht?

4. Zwischen den kleinsten Teilchen von Atomkernen (sog. Quarks) wirkt eine Kraft, die vom Abstand r näherungsweise folgendermaßen abhängt:

$$F(r) = \frac{k_1}{r^2} + k_2$$

mit Konstanten k_1 und k_2. Geben Sie eine allgemeine Formel für die Arbeit an, die benötigt wird, um zwei Quarks vom Abstand r_1 in den Abstand r_2 voneinander zu bringen. Was ergibt sich, wenn r_2 gegen unendlich geht?

1. $W = \int_{x_1}^{x_2} (Dx)dx = \left[\frac{1}{2}Dx^2\right]_{x_1}^{x_2} = \frac{1}{2}\, D \left((x_2)^2 - (x_1)^2\right)$ ➔ W = 0,2 J

2. $W = \int_{r_1}^{r_2} G\frac{m_1 m_2}{r^2}dr = \left[-G\frac{m_1 m_2}{r}\right]_{r_1}^{r_2} = G\, m_1 m_2 \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$ ➔ W = 5,43 GJ

3. $W = -\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\,\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\,\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$ ➔ W = 80,9 GJ; $\lim_{r_2\to\infty} W = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\,\varepsilon_0\, r_1}$

4. $W = k_1 \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) + k_2 \cdot (r_2 - r_1)$; $\lim_{r_2\to\infty} W = \infty$

Gruppenarbeit: Anwendungen des Integrals

Gruppe C: Leistung und Energie, Ladung und Strom

Die Ableitung der Energie E(t) eines Körpers gibt die momentane zeitliche Änderungsrate dieser Energie an, also wie viel Arbeit pro Zeit an diesem bzw. von diesem Körper geleistet wird – also die Leistung P(t). Ebenso gibt die Ableitung der Ladung Q(t) auf einem Kondensator die momentane zeitliche Änderungsrate dieser Ladung an, also wie viel Ladung pro Zeit auf den Kondensator fließt bzw. von ihm weg fließt – also die Stärke des elektrischen Stroms I(t).

Umgedreht gilt deshalb nach dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung:

$$\int_0^t P(t')dt' = \int_0^t \dot{E}(t')dt' = E(t) - E(0) = \Delta E$$

und

$$\int_0^t I(t')dt' = \int_0^t \dot{Q}(t')dt' = Q(t) - Q(0) = \Delta Q;$$

das Integral über die Leistung ergibt also die Änderung der Energie in einem Körper (und wenn die Energie zur Zeit 0 bekannt ist, damit auch die zu einer beliebigen Zeit t), das Integral über die Stromstärke ergibt die Änderung der Ladung auf einem Kondensator (und wenn die Ladung zur Zeit 0 bekannt ist, damit auch den zu einer beliebigen Zeit t).

1. Ein Auto der Masse m = 1200 kg wird aus der Ruhe beschleunigt (d. h. es gilt E(0) = 0). Für die auf die Räder übertragene Motorleistung (in Watt) gilt dabei in Abhängigkeit der Zeit (in Sekunden):

$$P(t) = 1620\ t^2 - 32\,400\ t + 162\,000 \text{ für } 0 \leq t \leq 10$$

Berechnen Sie die (kinetische) Energie des Autos nach Ende des Beschleunigungsvorganges (in Joule) und damit die erreichte Geschwindigkeit.

2. Ein Kondensator wird an eine Wechselspannungsquelle angeschlossen; für die Stromstärke gilt:

$$I(t) = I_0 \sin(\omega\, t)$$

mit der Kreisfrequenz $\omega = \frac{2\pi}{T}$, wobei T die Periodenlänge ist.

a) Ermitteln Sie Q(t) unter der Bedingung, dass zur Zeit t = 0 die Ladung auf dem Kondensator gleich $-\frac{I_0}{\omega}$ ist.

b) Geben Sie eine Gleichung für die Spannung $U_C = Q/C$ an einem Kondensator der Kapazität in Abhängigkeit von der Zeit t an. Welche Amplitude ergibt sich für diese Spannung? Welchen Widerstand hat ein Kondensator also, wenn man den Widerstand einfach als Quotienten der Amplituden von Spannung und Stromstärke berechnet?

3. Für die Spannung U_R an einem ohmschen Widerstand gilt: $U_R = R\ I$. Der ohmsche Widerstand wird an eine Wechselspannungsquelle angeschlossen, vgl. Aufgabe 2.

a) Geben Sie die Gleichung für die Spannung U_R und die Leistung P = U I in Abhängigkeit von der Zeit an. Vereinfachen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie die Formel für $\left(\sin\frac{\varphi}{2}\right)^2$ aus der Merkhilfe verwenden (mit $\frac{\varphi}{2} = \omega\, t$).

b) Ermitteln Sie, um wieviel sich die Energie des Widerstands im Laufe einer Periode T ändert, und berechnen Sie damit die *mittlere* Leistung während einer Periode. Drücken Sie das Ergebnis durch R und $U_0 = R\ I_0$ aus.

1. $E_{kin}(10) - E_{kin}(0) = \int_0^{10} P(t')dt'$

mit E(0) = 0 ➔ $E_{kin}(10) = \int_0^{10} (1620\, t'^2 - 32\,400\, t' + 162\,000)\, dt'$

$= [540\, t'^3 - 16\,200\, t'^2 + 162\,000\, t']_0^{10} = \cdots = 540\,000$ (J)

$E_{kin} = \frac{1}{2} m\, v^2$ ➔ $v = \sqrt{\frac{2\, E_{kin}}{m}} = \ldots = 30$ m/s = 108 km/h

2. a) $Q(t) = -\frac{I_0}{\omega}\cos(\omega t) + c$; $Q(0) = -\frac{I_0}{\omega}$ ➔ $c = 0$

b) $U_C(t) = -\frac{I_0}{C\omega}\cos(\omega t)$;   Amplitude: $U_{C0} = \frac{I_0}{C\omega}$ ➔ Widerstand: $R = \frac{1}{C\omega}$

3. a) $U_R(t) = R\, I_0 \sin(\omega t)$; $P(t) = R\, I_0^2 \sin^2(\omega t) = \frac{1}{2} R\, I_0^2\, (1 - \cos(2\omega t))$

b) $\Delta E = \frac{1}{2}\int_0^T R\, I_0^2 \left(1 - \cos(2\omega t)\right) dt = \ldots = \frac{1}{2} R\, I_0^2\, T$ ➔ mittlere Leistung: $\bar{P} = \frac{\Delta E}{T} = \frac{1}{2} R\, I_0^2 = \ldots = \frac{U_0^2}{2R}$

Gruppenarbeit: Anwendungen des Integrals
Gruppe D: Änderungsrate und Änderung

Gibt eine Funktion G(t) an, wie eine Größe G von der Zeit t abhängt, so beschreibt ihre erste (zeitliche) Ableitung $\dot{G}$(t) bekanntlich die momentane Änderungsrate mit der Zeit (also wie schnell sich die Größe zu einer gegebenen Zeit gerade verändert). Da gilt:

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{G}(t)dt = G(t_2) - G(t_1),$$

(Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung), beschreibt das Integral (zwischen den Zeiten t_1 und t_2) über eine Änderungsrate also allgemein, um wie viel sich eine Größe zwischen diesen Zeiten ändert.

1. Der Wasserverbrauch w (in m^3/h) einer Wohnsiedlung ändert sich im Laufe eines Vormittags kontinuierlich; er kann zwischen t = 6 (Uhr) und t = 12 (Uhr) beschrieben werden durch die Funktion

$$w(t) = 0{,}7\, t^3 - 18\, t^2 + 150\, t - 390$$

Berechnen Sie, welches Wasservolumen V an diesem Vormittag insgesamt verbraucht wird; verwenden Sie dafür, dass w = $\dot{V}$ gilt.

2. Personen, die vorübergehend eine Fastendiät einhalten, nehmen erfahrungsgemäß nicht gleichmäßig, sondern im Laufe der Zeit immer weniger ab. Wir nehmen an, dass bei einem bestimmten Diätvorschlag die wöchentliche Abnahmerate

$$r(t) = 1000 - 50\, t^2 \quad \text{(t in Wochen, r in g/Woche)}$$

zugesichert wird. Berechnen Sie, um wie viel kg man mit dieser Diät in 4 Wochen abnimmt.

3. (aus Abiturprüfung 2004, Baden-Württemberg) Die momentane Änderungsrate des Luftvolumens in der Lunge kann durch die Funktion f mit

$$f(t) = 0{,}5 \sin(0{,}4\, \pi\, t)$$

beschrieben werden (t in s, f in l/s). Zur Zeit t = 0 befinde sich keine Luft in der Lunge. Ermitteln Sie die Gleichung der Funktion V, die angibt, welches Luftvolumen sich zur Zeit t jeweils in der Lunge befindet Verwenden Sie dafür das unbestimmte Integral

$$\int \sin(ax)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax) + c\,.$$

1. $V = \int_6^{12} (0{,}7t^3 - 0{,}18t^2 + 150t - 390)\,dt = 90\ (m^3)$

2. $\int_0^4 (1000 - 50t^2)\,dt = 2933\frac{1}{3}$, man nimmt also knapp 3 kg ab

3. $V(t) - V(0) = \int_0^t f(t')\,dt' = \left[-\frac{1{,}25}{\pi}\cos(0{,}4\pi\, t')\right]_0^t$; mit $V(0) = 0$ folgt: $V(t) = \frac{1{,}25}{\pi}\left(1 - \cos(0{,}4\pi\, t)\right)$