Gruppenarbeit: Anwendungen des Integrals

Gruppe A: Weg und Geschwindigkeit

Die erste Ableitung der Zeit-Ort-Funktion x(t) der Bewegung eines Körpers ergibt bekanntlich die Zeit-Geschwindigkeits-Funktion v(t), deren erste Ableitung wiederum die Zeit-Beschleunigungs-Funktion a(t).

Umgedreht gilt also nach dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung:

$$\int_{t_0}^{t} a(t')dt' = \int_{t_0}^{t} \dot{v}(t')dt' = v(t) - v(t_0) \quad \text{und} \quad \int_{t_0}^{t} v(t')dt' = \int_{t_0}^{t} \dot{x}(t')dt' = x(t) - x(t_0)\,;$$

das Integral über die Beschleunigung ergibt also die Geschwindigkeitsänderung (und wenn die Geschwindigkeit zur Zeit t_0 bekannt ist, damit auch die zu einer beliebigen Zeit t), das Integral über die Geschwindigkeit ergibt die Ortsveränderung (und wenn der Ort zur Zeit t_0 bekannt ist, damit auch den zu einer beliebigen Zeit t). Speziell für $t_0 = 0$ ergibt sich:

$$\boxed{v(t) = v(0) + \int_0^t a(t')dt'} \quad \text{und} \quad \boxed{x(t) = x(0) + \int_0^t v(t')dt'}$$

(Die zurückgelegte Strecke in der Zeit von 0 bis t erhält man dagegen aus $s = \int_0^t |v(t')|dt'$.)

1. Ein Körper bewegt sich gleichförmig mit einer Geschwindigkeit von –5 m/s; zu Beginn (t = 0) befindet er sich 20 m vom Ursprung entfernt. Geben Sie die Zeit-Orts- und Zeit-Geschwindigkeitsfunktion an (vgl. Physik Klasse 11!) und vergleichen Sie mit dem Ergebnis, das man mittels der obigen Formeln erhält (*Tipp:* eine gleichförmige Bewegung ist kräftefrei, also ist die Beschleunigung a(t) = 0).

2. Auf einen Körper wirke die <u>konstante</u> Beschleunigung a(t) = –g in y-Richtung (y-Achse nach oben). Ermitteln Sie die Zeit-Geschwindigkeits- und Zeit-Orts-Funktionen v(t) und y(t); benutzen Sie dabei für die Geschwindigkeit und den Ort zur Zeit t = 0 die Bezeichnungen v_0 bzw. y_0. (senkrechter Wurf)

3. Ein PKW wird aus der Ruhe vom Ursprung der x-Achse an beschleunigt; dabei gilt für die Beschleunigung a in Abhängigkeit von der Zeit t:

$$a(t) = 5\tfrac{m}{s^2} - 0{,}2\tfrac{m}{s^3}\cdot t$$

a) Ermitteln Sie die Zeit-Geschwindigkeits- und die Zeit-Orts-Funktion.
b) Warum nimmt die Beschleunigung mit der Zeit ab, auch wenn man konstant Gas gibt? (physikalische Begründung!) Warum ist die Beschreibung hier für t > 25 s nicht realistisch?

4. Eine realistischere Beschreibung ist gegeben durch

$$a(t) = \begin{cases} 5\tfrac{m}{s^2} - 0{,}2\tfrac{m}{s^3}\cdot t & \text{für } 0 \le t \le 25\,\text{s} \\ 0 & \text{für } t > 25\,\text{s} \end{cases}$$

a) Ermitteln Sie die Zeit-Geschwindigkeits- und Zeit-Orts-Funktionen; unterscheiden Sie dabei $0 \le t \le 25$ s (verwenden Sie Ihre Ergebnisse aus Aufgabe 3!) und t > 25 s. (*eine Skizze des Zeit-Beschleunigungsdiagramms kann hilfreich sein!)*
b) Zeichnen Sie ein Zeit-Ort-Diagramm für $0 \le t \le 50$.

wenn noch Zeit ist:

5. Die Bewegung eines Körpers werde beschrieben durch

$$v(t) = \begin{cases} 2\,\frac{m}{s^2} & \text{für } 0 \le t < 5\,\text{s} \\ -2\,\frac{m}{s^2} & \text{für } 0 \le t < 10\,\text{s} \end{cases}$$

Berechnen Sie die Ortsveränderung $\Delta x = x(10\ \text{s}) - x(0\ \text{s})$ und die in der Zeit von 0 s bis 10 s zurückgelegte Strecke s

a) direkt

b) mithilfe von Integralen

1. mit Wissen aus Klasse 11: $v(t) = -5\ m/s$; $x(t) = -5\ m/s \cdot t + 20\ m$

mit den Formeln: $v(t) = -5\ m/s + \int_0^t 0dt' = -5\ m/s$; $x(t) = 20\ m + \int_0^t (-5\ m/s)dt' = 20\ m - 5\ m/s \cdot t$

2. $v(t) = v_0 + \int_0^t (-g)dt' = v_0 - g\ t$; $x(t) = x_0 + \int_0^t (v_0 - g\ t')dt' = x_0 + v_0\ t - \frac{1}{2} g\ t^2$

3. a) $v_P(t) = 0 + \int_0^t (5\frac{m}{s^2} - 0{,}2\frac{m}{s^3} \cdot t')dt' = 5\frac{m}{s^2} \cdot t - 0{,}1\frac{m}{s^3} \cdot t^2$

$x_P(t) = 0 + \int_0^t (5\frac{m}{s^2} \cdot t' - 0{,}1\frac{m}{s^3} \cdot t'^2)dt' = 2{,}5\frac{m}{s^2} \cdot t^2 - \frac{1}{30}\frac{m}{s^2} \cdot t^3$

b) mit zunehmender Geschwindigkeit nimmt die Luftwiderstandskraft zu; diese wirkt der Beschleunigungskraft des Autos entgegen ➔ die Beschleunigung nimmt ab; für t > 25 s hätte man eine negative Beschleunigung, also eine Abbremsung, was natürlich wenig Sinn ergibt (statt dessen wird eine konstante Geschwindigkeit erreicht, d. h. a = 0 für t > 25 s, s. Aufgabe 4!)

4. a) für t > 25 s:

$v_P(t) = 0 + \int_0^t a(t')dt' = \int_0^{25\,s} (5\frac{m}{s^2} - 0{,}2\frac{m}{s^3} \cdot t')dt' + \int_{25s}^{t} 0dt' = 62{,}5\frac{m}{s}$

$x_P(t) = 0 + \int_0^t v_P(t')dt' = \int_0^{25\,s} \left(5\frac{m}{s^2} \cdot t - 0{,}1\frac{m}{s^3} \cdot t^2\right)dt' + \int_{25\,s}^{t} 62{,}5\frac{m}{s}dt' = 1041\tfrac{2}{3}\,m + 62{,}5\frac{m}{s} \cdot (t - 25\ s)$

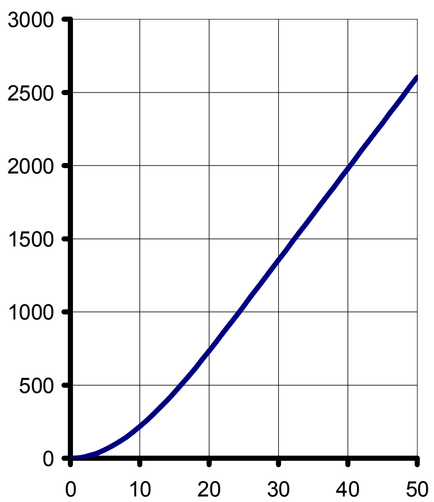
$= 62{,}5\frac{m}{s} \cdot t - 520\tfrac{5}{6}\,m$

also mit den Ergebnissen aus Aufgabe 3 insgesamt:

$$v_P(t) = \begin{cases} 5\frac{m}{s^2} \cdot t - 0{,}1\frac{m}{s^3} \cdot t^2 & \text{für } 0 \le t \le 25\,s \\ 62{,}5\frac{m}{s} & \text{für } t > 25\,s \end{cases}$$

$$x_P(t) = \begin{cases} 2{,}5\frac{m}{s^2} \cdot t^2 - \frac{1}{30}\frac{m}{s^3} \cdot t^3 & \text{für } 0 \le t \le 25\,s \\ 62{,}5\frac{m}{s} \cdot t - 520\tfrac{5}{6}\,m & \text{für } t > 25\,s \end{cases}$$

b)



5. a) Der Körper bewegt sich 5 Sekunden lang mit 2 m/s in positive x-Richtung, danach 5 Sekunden lang mit 2 m/s in negative x-Richtung. Am Schluss ist der Körper also wieder am Ausgangspunkt angekommen, also ist $\Delta x = 0$. Die zurückgelegte Strecke ist dagegen 5 s · 2 m/s + 5 s · 2 m/s = 20 m.

b) $\Delta x = \int_{0s}^{10s} v(t')dt' = \int_{0s}^{5s} v(t')dt' + \int_{5s}^{10s} v(t')dt' = \int_{0s}^{5s} 2\tfrac{m}{s}\,dt' + \int_{5s}^{10s} -2\tfrac{m}{s}\,dt' = \left[2\tfrac{m}{s}t'\right]_{0s}^{5s} + \left[-2\tfrac{m}{s}t'\right]_{5s}^{10s}$

= 10 m + (–10 m) = 0 m

$s = \int_{0s}^{10s} |v(t')|dt' = \int_{0s}^{5s} v(t')dt' + \int_{5s}^{10s} v(t')dt' = \int_{0s}^{5s} 2\tfrac{m}{s}\,dt' + \int_{5s}^{10s} 2\tfrac{m}{s}\,dt' = \left[2\tfrac{m}{s}t'\right]_{0s}^{5s} + \left[2\tfrac{m}{s}t'\right]_{5s}^{10s}$ = 10 m + 10 m = 20 m

Gruppenarbeit: Anwendungen des Integrals

Gruppe B: Kraft und Arbeit

Bei einer konstanten Kraft F, die auf einer Strecke x (und parallel dazu) wirkt, gilt bekanntlich für die geleistete Arbeit W:

$$W = F \cdot x$$

Die meisten Kräfte sind aber nicht konstant (Beispiele: Federkraft, Gravitationskraft, elektrische Kraft), sondern hängen ihrerseits vom Ort x ab, wir haben also eine Funktion F(x).

Aber man kann die Arbeit natürlich trotzdem näherungsweise berechnen: wir nehmen z. B. an, dass die Kraft jeweils auf einer Strecke von 10 cm ungefähr konstant bleibt (für z. B. die Gravitationskraft der Erde ist das eine sehr gute Näherung – für Federn sicher weniger...). Dann gilt für die geleistete Arbeit, wenn man sich insgesamt 30 cm weit bewegt:

$$W \approx F(0) \cdot 10\,\mathrm{cm} + F(10\,\mathrm{cm}) \cdot 10\,\mathrm{cm} + F(20\,\mathrm{cm}) \cdot 10\,\mathrm{cm}$$

Nimmt man allgemein an, dass die Kraft jeweils auf einer Strecke Δx ungefähr konstant bleibt, so ergibt sich für die Arbeit:

$$W \approx \sum_{k=1}^{n} F(x_k) \cdot \Delta x$$

Will man die geleistete Arbeit möglichst genau haben, so muss man die Wegstrecken möglichst klein machen, also den Grenzübergang Δx → 0 durchführen; dann wird aus der Summe wie bekannt ein Integral:

$$\boxed{W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx}$$

(Beachten Sie: Hier ist F die Kraft, die aufgewendet wird, um ein Objekt <u>gegen</u> eine äußere Kraft zu bewegen – <u>nicht</u> diese äußere Kraft selbst!)

1. Begründen Sie rechnerisch, dass zum Spannen einer Feder mit Federkonstante D von der Dehnung x_1 zur Dehnung x_2 die Arbeit

$$W = \frac{1}{2}\, D \left((x_2)^2 - (x_1)^2 \right)$$

nötig ist (verwenden Sie das Hooke'sche Gesetz F(x) = D x). Berechnen Sie diese Arbeit für D = 5 N/cm, x_1 = 1 cm, x_2 = 3 cm.

2. Für die Gravitationskraft zwischen zwei Körpern der Massen m_1 und m_2, deren Mittelpunkte den Abstand r voneinander haben, gilt:

$$F(r) = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \text{ (Newtonsches Gravitationsgesetz),}$$

wobei $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}$ die Gravitationskonstante ist. Berechnen Sie, welche Arbeit verrichtet werden muss, um einen Satelliten der Masse m_1 = 100 kg von der Erdoberfläche ($r_1 = 6{,}4 \cdot 10^6$ m) in eine Umlaufbahn mit $r_2 = 5 \cdot 10^7$ m zu befördern (Erdmasse: $m_2 = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg). (*Tipp:* Leiten Sie evtl. zunächst eine allgemeine Formel für die Arbeit im Gravitationsfeld her und setzen Sie erst am Schluss die Zahlenwerte ein; verwenden Sie das unbestimmte Integral $\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + C$)

Bitte wenden!

3. Für die elektrische Kraft zwischen zwei Körpern der Ladungen Q_1 und Q_2, deren Mittelpunkte den Abstand r voneinander haben, gilt:

$$F(r) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r^2} \text{ (Coulombsches Gesetz),}$$

wobei $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{N\,m}^2}$ die sogenannte elektrische Feldkonstante ist. Geben Sie mit Hilfe Ihrer Ergebnisse in (2) eine allgemeine Formel für die Arbeit an, die benötigt wird, um zwei geladene Körpern vom Abstand r_1 in den Abstand r_2 voneinander zu bringen (vgl. Formelsammlung Physik!). Berechnen Sie diese Arbeit für $Q_1 = 1$ C, $Q_2 = -1$ C, $r_1 = 10$ cm und $r_2 = 1{,}0$ m. Was ergibt sich, wenn r_2 gegen unendlich geht?

4. Zwischen den kleinsten Teilchen von Atomkernen (sog. Quarks) wirkt eine Kraft, die vom Abstand r näherungsweise folgendermaßen abhängt:

$$F(r) = \frac{k_1}{r^2} + k_2$$

mit Konstanten k_1 und k_2. Geben Sie eine allgemeine Formel für die Arbeit an, die benötigt wird, um zwei Quarks vom Abstand r_1 in den Abstand r_2 voneinander zu bringen. Was ergibt sich, wenn r_2 gegen unendlich geht?

1. W = $\int_{x_1}^{x_2}(Dx)dx = \left[\frac{1}{2}Dx^2\right]_{x_1}^{x_2} = \frac{1}{2}$ D $\left((x_2)^2 - (x_1)^2\right)$ ➔ W = 0,2 J

2. W = $\int_{r_1}^{r_2} G\frac{m_1m_2}{r^2}dr = \left[-G\frac{m_1m_2}{r}\right]_{r_1}^{r_2} = G\,m_1m_2\cdot\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$ ➔ W = 5,43 GJ

3. W = $-\frac{Q_1Q_2}{4\pi\,\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right) = \frac{Q_1Q_2}{4\pi\,\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)$ ➔ W = 80,9 GJ; $\lim_{r_2\to\infty} W = \frac{Q_1Q_2}{4\pi\,\varepsilon_0\,r_1}$

4. W = $k_1\cdot\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)+k_2\cdot(r_2-r_1)$; $\lim_{r_2\to\infty} W = \infty$

Gruppenarbeit: Anwendungen des Integrals

Gruppe C: Änderungsrate und Änderung

Gibt eine Funktion G(t) an, wie eine Größe G von der Zeit t abhängt, so beschreibt ihre erste (zeitliche) Ableitung $\dot{G}(t)$ bekanntlich die momentane Änderungsrate mit der Zeit (also wie schnell sich die Größe zu einer gegebenen Zeit gerade verändert). Da gilt:

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{G}(t)dt = G(t_2) - G(t_1)$$

(Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung), beschreibt das Integral (zwischen den Zeiten t_1 und t_2) über eine Änderungsrate also allgemein, um wie viel sich eine Größe zwischen diesen Zeiten ändert.

1. Der Wasserverbrauch w (in m^3/h) einer Wohnsiedlung ändert sich im Laufe eines Vormittags kontinuierlich; er kann zwischen t = 6 (Uhr) und t = 12 (Uhr) beschrieben werden durch die Funktion

$$w(t) = 0{,}7\, t^3 - 18\, t^2 + 150\, t - 390$$

Berechnen Sie, welches Wasservolumen V an diesem Vormittag insgesamt verbraucht wird; benutzen Sie dafür $w = \dot{V}$.

2. Personen, die vorübergehend eine Fastendiät einhalten, nehmen erfahrungsgemäß nicht gleichmäßig, sondern im Laufe der Zeit immer weniger ab. Wir nehmen an, dass bei einem bestimmten Diätvorschlag die wöchentliche Abnahmerate

$$r(t) = 1000 - 50\, t^2 \quad \text{(t in Wochen, r in g/Woche)}$$

zugesichert wird. Berechnen Sie, um wie viel kg man mit dieser Diät in 4 Wochen abnimmt.

3. (aus Abiturprüfung 2004, Baden-Württemberg) Die momentane Änderungsrate des Luftvolumens in der Lunge kann durch die Funktion f mit

$$f(t) = 0{,}5 \sin(0{,}4\, \pi\, t)$$

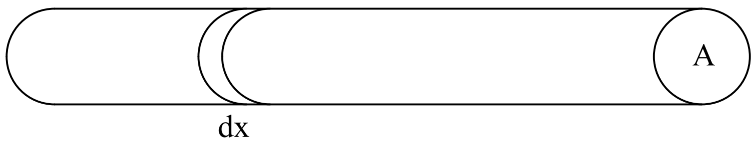
beschrieben werden (t in s, f in l/s). Zur Zeit t = 0 befinde sich keine Luft in der Lunge. Ermitteln Sie die Gleichung der Funktion V, die angibt, welches Luftvolumen sich zur Zeit t jeweils in der Lunge befindet Verwenden Sie dafür das unbestimmte Integral

$$\int \sin(ax)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax) + c\,.$$

Bitte wenden!

wenn noch Zeit ist:

Analoges gilt, wenn eine Funktion G(x) angibt, wie eine Größe vom Ort x abhängt: ändert sich z. B. die Dichte längs eines Stabes, so ergibt sich seine gesamte Masse durch Integration über die Dichte vom einen Ende zum anderen (mal der Querschnittsfläche A). Dies kann man sich auch direkt veranschaulichen (hier nur für einen kreisrunden Stab gezeigt, bei anderen geht's genauso):



Die gesamte Masse erhält man, indem man die Massen von Zylindern mit Grundfläche A und („unendlich kleiner") Höhe dx aufsummiert. Die Masse eines solchen Zylinders ist dm = $\rho(x) \cdot V = \rho(x) \cdot A \cdot dx$, also ist die gesamte Masse:

$$m = \int dm = \int_a^b \rho(x) \cdot A \cdot dx = A \cdot \int_a^b \rho(x) dx,$$

wenn die Querschnittsfläche A als konstant ist und die Enden des Stabs bei a und b liegen.

4. Bei einem kreisrunden Stab der Länge 20 cm und mit dem Radius 1 cm nimmt die Dichte längs seiner Länge gemäß

$$\rho(x) = 9 - 0{,}1\,x \quad (x \text{ in cm},\ 0 \le x \le 20)$$

ab. Berechnen Sie die Masse des Stabs.

1. $V = \int_{6}^{12} (0{,}7t^3 - 0{,}18t^2 + 150t - 390)\,dt = 90\ (m^3)$

2. $\int_{0}^{4} (1000 - 50t^2)\,dt = 2933\frac{1}{3}$, man nimmt also knapp 3 kg ab

3. $V(t) - V(0) = \int_{0}^{t} f(t')\,dt' = \left[-\frac{1{,}25}{\pi}\cos(0{,}4\pi\, t')\right]_0^t$; mit V(0) = 0 folgt: $V(t) = \frac{1{,}25}{\pi}\left(1 - \cos(0{,}4\pi\, t)\right)$

4. $m = \int_{0}^{20} (9 - 0{,}1x)\,dx \cdot \pi \cdot (1\ \text{cm})^2 = 160\pi \approx 503\ (g)$

Gruppenarbeit: Anwendungen des Integrals

Gruppe D: Mittelwerte

Sind mehrere Werte einer Größe (z. B. mehrere Temperaturen T_1, T_2, ..., T_n) gegeben, so berechnet man ihren Mittelwert (also hier die Durchschnittstemperatur $\overline{T}$ bekanntlich, indem man alle addiert und durch die Anzahl teilt:

$$\overline{T} = \frac{T_1 + T_2 + \ldots + T_n}{n}$$

Was aber macht man, wenn der zeitliche Verlauf einer Größe (z. B. die Temperatur T in Abhängigkeit von der Zeit t, also T(t)) gegeben und der Mittelwert gesucht ist?

1. Gegeben sei folgende Funktion, die näherungsweise den Temperaturverlauf innerhalb eines Tages (t in Stunden, von 0 bis 24 Uhr) beschreibt (T in Grad Celsius):

$$T(t) = -\frac{1}{8}t^2 + 3\,t + 16$$

Bestimmen Sie die mittlere Temperatur an diesem Tag näherungsweise, indem Sie (a) den Mittelwert der Temperaturen zu den Zeiten 0 Uhr, 6 Uhr, 12 Uhr und 18 Uhr (b) den Mittelwert der Temperaturen zu den Zeiten 0 Uhr, 4 Uhr, 8 Uhr, 12 Uhr, 16 Uhr und 20 Uhr berechnen. Welcher der beiden Mittelwerte ist genauer?

Die mittlere Temperatur kann man also offensichtlich folgendermaßen näherungsweise berechnen:

$$\overline{T} \approx \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} T_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} T(t_k)$$

mit Zeiten t_k, die beliebig gewählt werden können; je mehr Zeiten benutzt werden, desto genauer wird das Ergebnis. Das kann man aber auch schreiben als:

$$\overline{T} \approx \frac{1}{n \cdot \Delta t}\sum_{k=1}^{n} T(t_k) \cdot \Delta t\,,$$

wobei Δt jeweils der zeitliche Abstand zwischen den einzelnen Zeiten t_k ist. Der Ausdruck im Nenner ist aber genau die gesamte verstrichene Zeit t_{ges} (hier: 24 Stunden), also:

$$\overline{T} \approx \frac{1}{24}\sum_{k=1}^{n} T(t_k) \cdot \Delta t$$

Im Grenzübergang $\Delta t \rightarrow 0$ wird aus der Summe wie bekannt ein Integral; die mittlere Temperatur ist also:

$$\overline{T} = \frac{1}{24}\int_0^{24} T(t)\,dt$$

2. Berechnen Sie mit dieser Formel die mittlere Temperatur für den in (1) angegebenen Temperaturverlauf und vergleichen Sie mit Ihren Näherungswerten oben.

Verallgemeinert man dies, so gilt also: Der Mittelwert einer Funktion f in einem Intervall [a;b] ist

$$\boxed{\bar{f} = \frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)\,dx}$$

3. Skizzieren Sie den Graph der Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = 0{,}5\,x^3 - 2\,x$$

und berechnen Sie den mittleren Funktionswert $\bar{f}$ im Intervall [0;2].

Bitte wenden!

4. Der Wasserverbrauch w (in m^3/h) einer Wohnsiedlung ändert sich im Laufe eines Vormittags kontinuierlich; er kann zwischen t = 6 (Uhr) und t = 12 (Uhr) beschrieben werden durch die Funktion

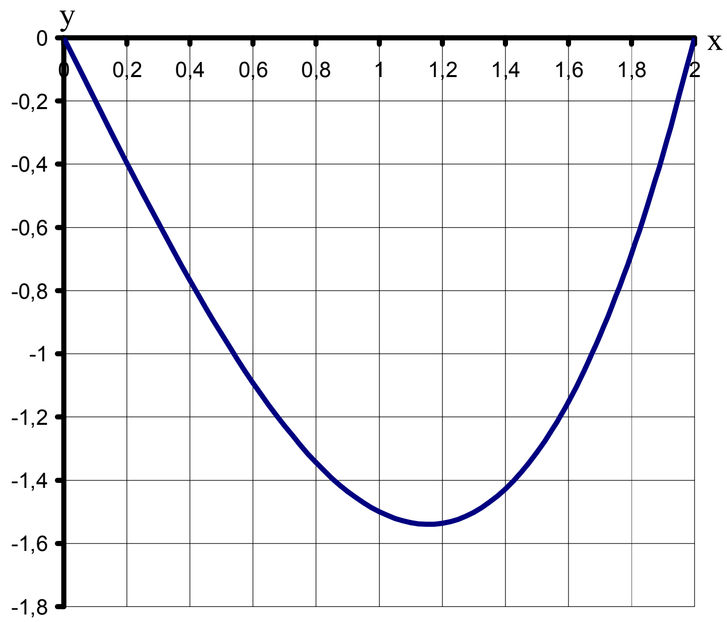
$$w(t) = 0{,}7\,t^3 - 18\,t^2 + 150\,t - 390$$

Berechnen Sie den mittleren Wasserverbrauch $\overline{w}$ an diesem Vormittag.

1. a) $\overline{\mathrm{T}} = \dfrac{16+29{,}5+34+29{,}5}{4} = 27{,}25$ b) $\overline{\mathrm{T}} = \dfrac{16+26+32+34+32+26}{6} = 27{,}\overline{6}$

2. $\overline{\mathrm{T}} = \dfrac{1}{24}\int_0^{24}\left(-\dfrac{1}{8}(t-12)^2+34\right)dt = 28$

3.



$\bar{\mathrm{f}} = \dfrac{1}{2-0}\int_0^{2}(0{,}5\mathrm{x}^3-2x)dx = -1$

4. $\overline{\mathrm{w}} = \dfrac{1}{12-6}\int_6^{12}(0{,}7\mathrm{t}^3-0{,}18\mathrm{t}^2+150\mathrm{t}-390)\mathrm{dt} = 15\ (\mathrm{m}^3/\mathrm{h})$

Gruppenarbeit: Anwendungen des Integrals

Gruppe E: Bogenlänge und Kreisfläche

Im Folgenden soll gezeigt werden, wie man mit Hilfe von Integralen Längen von Kurven berechnen kann.

1. Zur Einstimmung sei zunächst folgende Funktion gegeben: $f(x)=\begin{cases} \frac{2}{3}x+1 & \text{für } 0 \le x \le 3 \\ 2x-3 & \text{für } 3 \le x \le 4 \\ 0{,}5x+3 & \text{für } 4 \le x \le 6 \end{cases}$

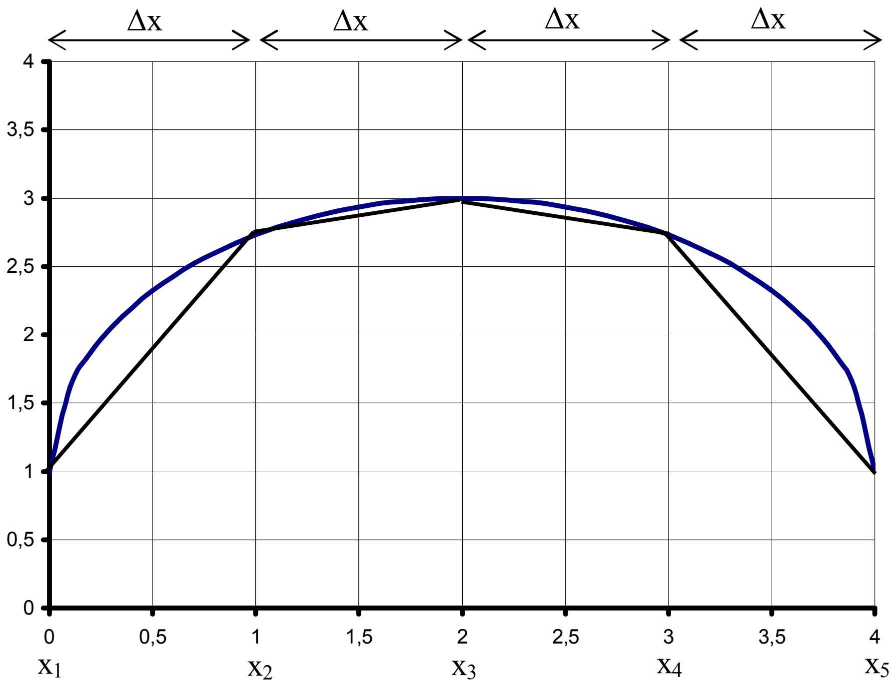
Zeichnen Sie ihren Graphen und berechnen Sie die gesamte Länge der gezeichneten Kurve (*Tipp:* Satz von Pythagoras).

2. Zeigen Sie allgemein: Die Länge eines Geradenstücks von einer Stelle x_k bis zur Stelle $x_k + \Delta x$, wobei die Gerade durch die Gleichung

$$y = m\,x + b$$

beschrieben wird, ist $L = \sqrt{1+m^2}\cdot\Delta x$ (*Tipp:* verallgemeinern Sie die Rechnung von Aufgabe 1).

Geht es um die Länge einer gekrümmten Kurve, so kann man statt der Geradensteigung m natürlich nur die Steigung der Tangente an einer Stelle x_k, also $f'(x_k)$, angeben. Eine beliebige Kurve kann man dann durch eine Zickzacklinie annähern:



Für die Länge der Kurve ergibt sich also:

$$L \approx \sqrt{1+(f'(x_1))^2}\cdot\Delta x + \sqrt{1+(f'(x_2))^2}\cdot\Delta x + \ldots = \sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+(f'(x_k))^2}\cdot\Delta x$$

Führt man den Grenzübergang $\Delta x \rightarrow 0$ durch, so wird aus der Summe wie bekannt ein Integral; die Länge einer allgemeinen Kurve, die durch eine Funktion f beschrieben wird, kann man also mit folgender Formel berechnen:

$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx}$$

3. Benutzen Sie diese Formel, um die Länge des Kurvenstücks zu berechnen, das durch die Funktion mit der Gleichung

$$f(x) = \frac{2}{3}(x-1)^{3/2}$$

beschrieben wird und zwischen x = 1 und x = 2 liegt. Benutzen Sie dabei, dass für beliebige reelle Zahlen a und r allgemein gilt:

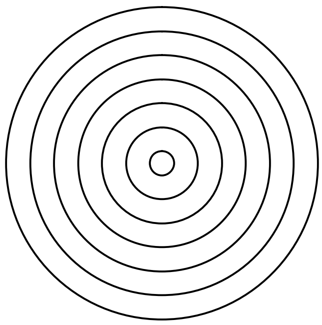
$$((x + a)^r)' = r\,(x + a)^{r-1}$$

bzw. umgedreht

$$\int (x+a)^r\, dx = \frac{1}{r+1}(x+a)^{r+1} + C$$

wenn noch Zeit ist:

4. Mit Hilfe der Integralrechnung kann man auch den Flächeninhalt eines Kreises berechnen. Die naheliegende Methode (Kreis bzw. Halbkreis als Graph einer Funktion darstellen und dann die Fläche unter dem Graph berechnen) ist mit den Mitteln der 12. Klasse zwar nicht machbar – aber mit Hilfe der Formel für den Kreisumfang geht es dennoch. Man stellt sich einen Kreis aus lauter Kreisringen der Breite Δr zusammengesetzt vor:

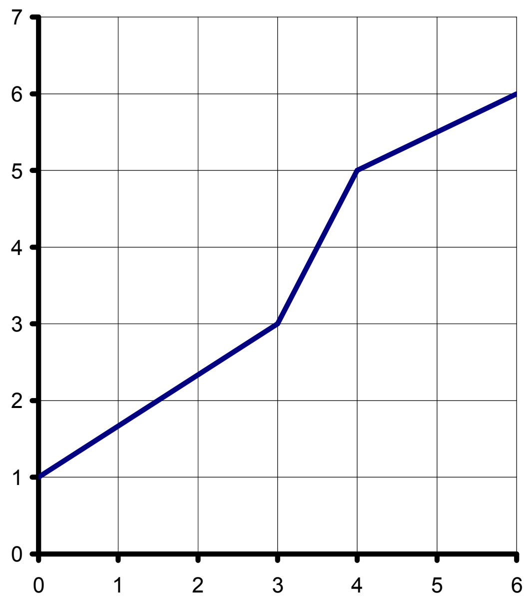


Der Kreisflächeninhalt ist in etwa gleich der Summe der Flächeninhalte aller Kreisringe (der Flächeninhalt des Kreises ganz innen wird vernachlässigt!) Einen Kreisring kann man sich aufgebogen in etwa als ein Rechteck vorstellen, dessen Länge gleich dem Umfang eines der Kreisringe und dessen Breite Δr ist. Damit erhält man für den Flächeninhalt des Kreises:

$$A \approx 2\pi r_1 \cdot \Delta r + 2\pi r_2 \cdot \Delta r + \ldots + 2\pi r_n \cdot \Delta r = \sum_{i=1}^{n} 2\pi\, r_i \cdot \Delta r$$

Führen Sie für diese Formel einen geeigneten Grenzübergang durch, um den Flächeninhalt eines Kreises mit Radius R als Integral darzustellen, und berechnen Sie diesen Flächeninhalt.

1.



$$L = \sqrt{(3-0)^2 + (3-1)^2} + \sqrt{(4-3)^2 + (5-3)^2} + \sqrt{(6-4)^2 + (6-5)^2} = \sqrt{13} + 2\sqrt{5} \approx 8{,}08$$

2. Steigungsdreieck: in x-Richtung ist die Breite Δx, in y-Richtung $m \cdot \Delta x$; Pythagoras:

$$L = \sqrt{(\Delta x)^2 + (m \cdot \Delta x)^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 + m^2 \cdot (\Delta x)^2} = \sqrt{(1+m^2)\cdot(\Delta x)^2} = \sqrt{1+m^2} \cdot \Delta x$$

3. mit der angegebenen Formel ergibt sich: $f'(x) = (x-1)^{1/2}$

damit folgt: $\sqrt{1+(f'(x))^2} = \sqrt{x}$

$$\Rightarrow L = \int_1^2 \sqrt{x}\,dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right] = \frac{2}{3} \cdot (2^{3/2} - 1) \approx 1{,}22$$

4. Im Grenzübergang $\Delta r \rightarrow 0$ wird aus der Summe ein Integral, und der Zusammenhang gilt nicht mehr näherungsweise, sondern exakt (der Flächeninhalt des inneren Kreises ist dann = 0). Die Integrationsgrenzen geben an, in welchem Bereich die Radien r der Kreisringe liegen, nämlich zwischen 0 und R:

$$A = \int_0^R 2\pi r\,dr = \left[\pi r^2\right]_0^R = \pi R^2$$