Gruppenarbeit: Anwendungen von Exponential- und zusammengesetzten Funktionen

Gruppe A: Wachstums- und Zerfallsvorgänge

1. Wenn Licht in Wasser eindringt, so verliert es mit zunehmender Wassertiefe durch Absorption an Intensität. In reinem Meerwasser nimmt die Lichtintensität pro Meter um etwa 75% des bis dahin jeweils verbliebenen Wertes ab. („Lambert-Beersches Gesetz")
a) Wie viel Prozent der ursprünglichen Intensität sind in 1 m, 2 m, 3 m Wassertiefe jeweils noch vorhanden?
b) In welcher Tiefe beträgt die Intensität weniger als 0,1 % der ursprünglichen Intensität?

2. Der radioaktive Kohlenstoff ^{14}C zerfällt mit einer Halbwertszeit von etwa 5730 Jahren in den stabilen Kohlenstoff ^{12}C. In der Atmosphäre ist das Verhältnis beider Kohlenstoffarten nahezu konstant; dasselbe gilt für lebende Organismen, die Kohlenstoff aufnehmen. Stirbt ein Organismus aber, so wird kein ^{14}C mehr aufgenommen, während das vorhandene weiterhin zerfällt. Dadurch ändert sich das Verhältnis beider Kohlenstoffarten mit der Zeit und kann so zur Altersbestimmung von archäologischen Funden benutzt werden.
a) Auf wie viel Prozent des ursprünglichen Wertes ist der ^{14}C-Gehalt in Pflanzenresten, die aus der Zeit um Christi Geburt stammen, inzwischen abgesunken?
b) Bei Ausgrabungen wird eine hölzerne Platte entdeckt. Untersuchungen ergeben, dass der Fund noch 68% des Kohlenstoffs ^{14}C enthält, der in einem lebenden Stück Holz vergleichbarer Größe vorhanden ist. Wie alt ist der Fund?

3. Für den barometrischen Luftdruck p (in hPa) gilt in Abhängigkeit von der Höhe über dem Meeresspiegel (in km) in guter Näherung die Funktionsgleichung $p(h) = 1013 \cdot 2^{-\frac{h}{5,5}}$. („barometrische Höhenformel")
a) Berechnen Sie, in welcher Höhe $h_{1/2}$ der Luftdruck nur noch die Hälfte des Wertes direkt über dem Meeresspiegel annimmt.
b) Zeigen Sie, dass der Luftdruck bei einer Höhenzunahme um $\Delta h = h_{1/2}$ unabhängig von der Ausgangshöhe h_A jeweils halbiert wird.
c) Berechnen Sie, ab welcher Höhe der Luftdruck weniger als 1/1000 des Wertes direkt über dem Meeresspiegel beträgt.

d) Zeigen Sie, dass man die Funktionsgleichung auch in der Form $p(h) = 1013 \cdot e^{\frac{\ln 0,5}{5,5} \cdot h}$ schreiben kann, und berechnen Sie daraus die Ableitungsfunktion p'(h).
e) Berechnen Sie den Wert des Differenzenquotienten $\frac{p(1) - p(0)}{1 - 0}$ sowie den Wert des Differenzialquotienten der Funktion p(h) an der Stelle $h_0 = 1$ und geben Sie die physikalische Bedeutung der beiden Werte an.
(nach Abschlussprüfung 2008/AI)

Bitte wenden!

4. Für den Wert $W(t)$ eines Autos (in €) in Abhängigkeit von der Zeit $t \geq 0$ (in Tagen) gelte der Zusammenhang $W(t) = W_0 \cdot e^{kt}$ mit einer geeigneten Konstanten k und dem Neupreis W_0.

a) Ein Händler geht davon aus, dass sich der Wert eines bestimmten Autotyps nach 3,5 Jahren (1 Jahr = 360 Tage) halbiert hat. Berechnen Sie daraus die Konstante k (Ergebnis: $k = -\frac{\ln 2}{1260}$).

b) Zum Zeitpunkt $t = t_E$ hat ein Auto dieses Typs, das einen Neupreis von 35 000 € hat, noch einen „Schrottwert" von 1 500 €. Berechnen Sie diesen Zeitpunkt t_E.

c) Nun wird die Ableitungsfunktion $\dot{W}(t)$ mit $t \in]0;t_E[$ betrachtet. Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte von $\dot{W}(t)$ an den Randstellen des Definitionsbereichs und interpretieren Sie die Ergebnisse im gegebenen Sachzusammenhang.

(nach Abschlussprüfung 2000)

1. a) 25%; 6,25%; 1,5625% b) $x = \frac{\ln 0{,}001}{\ln 0{,}25} \approx 5$ (m)

2. a) $0{,}5^{2010/5730} \approx 78{,}4\%$ b) 5730 Jahre $\cdot \frac{\ln 0{,}68}{\ln 0{,}5} \approx 3190$ Jahre

3. a) $h_{1/2} = 5{,}5$ (km) b) $p(h_A + 5{,}5) = 1013 \cdot 2^{-\frac{h_A+5{,}5}{5{,}5}} = 1013 \cdot 2^{-\frac{h_A}{5{,}5}-1} = 1013 \cdot 2^{-\frac{h_A}{5{,}5}} \cdot 2^{-1} = p(h_A) : 2$

c) $h = -5{,}5 \cdot \frac{\ln 0{,}001}{\ln 2} \approx 54{,}8$ km

d) $2^{-\frac{h}{5{,}5}} = \left(2^{-1}\right)^{\frac{h}{5{,}5}} = 0{,}5^{\frac{h}{5{,}5}} = \left(e^{\ln 0{,}5}\right)^{\frac{h}{5{,}5}} = e^{\frac{\ln 0{,}5}{5{,}5} \cdot h}$ ➔ $p'(h) = \frac{\ln 0{,}5}{5{,}5} \cdot e^{\frac{\ln 0{,}5}{5{,}5} \cdot h}$

e) $\frac{p(1) - p(0)}{1 - 0} \approx -120$: mittlere Änderungsrate des Luftdrucks im ersten Kilometer über dem Boden, d. h. auf dem ersten Kilometer nimmt der Luftdruck um etwa 120 hPa ab.

$p'(1) \approx -113$: lokale Änderungsrate des Luftdrucks ein Kilometer über dem Boden, d. h. in einem Kilometer Höhe nimmt der Luftdruck um etwa 113 hPa pro km ab.

4. a) $e^{k \cdot 3{,}5 \cdot 360} = 0{,}5$; logarithmieren ergibt das Ergebnis in der Angabe

b) $t_E \approx 5726$ (Tage), also etwa 16 Jahre

c) $\lim\limits_{t \to 0} \dot{W}(t) = -\frac{35000}{1260} \cdot \ln 2 \approx -19{,}25$, d. h. am Anfang nimmt der Wert um etwa 19,25 € pro Tag ab.

$\lim\limits_{t \to t_E} \dot{W}(t) = -\frac{1500}{1260} \cdot \ln 2 \approx -0{,}83$, d. h. nach 16 Jahren nimmt der Wert um etwa 0,83 € pro Tag ab.

Gruppenarbeit: Anwendungen von Exponential- und zusammengesetzten Funktionen

Gruppe B: Zeitlicher Verlauf von Strömen

1. Beim Ladevorgang eines Kondensators, der am Anfang (t = 0) leer ist, kann die bis zur Zeit t transportierte Ladung Q(t) in Abhängigkeit von der Zeit durch folgenden Funktionsterm dargestellt werden (Q in Coulomb, t in Sekunden): $Q(t) = 520 \cdot \left(1 - e^{-0,25t}\right)$; $t \geq 0$.

a) Berechnen Sie, wie groß die mögliche Gesamtladung Q_0 in diesem Kondensator für $t \rightarrow \infty$ ist.

b) Berechnen Sie, zu welchem Zeitpunkt t_1 die Hälfte von Q_0 erreicht ist.

c) Die Stromstärke I(t) ist die erste Ableitung von Q(t) nach der Zeit. Geben Sie eine Gleichung für I(t) an.

d) Begründen Sie (rechnerisch und physikalisch), dass I(t) eine streng monoton fallende Funktion ist. Ermitteln Sie damit den maximal möglichen Wert von I.

e) Berechnen Sie den Zeitpunkt t_2, zu dem die Stromstärke auf 5% ihres Anfangswerts gesunken ist.

f) Zeichnen Sie den Graph von I(t) für $0 \leq t \leq 15$.

g) Begründen Sie, dass die bis zum Zeitpunkt t_2 transportierte Ladung folgendermaßen berechnet werden kann:

$$Q(t_2) = \int_0^{t_2} I(t)dt$$

Kennzeichnen Sie dann in ihrem Graph die Maßzahl für die bis zum Zeitpunkt $t_2 = 12$ übertragene Ladung. Berechnen Sie, zu welchem Prozentsatz der Kondensator zum Zeitpunkt t_2 geladen ist.
(nach Abschlussprüfung 2002)

2. Beim Einschalten eines Gleichstromkreises, in dem eine Spule mit der Induktivität L und ein ohmscher Widerstand R in Reihe geschaltet sind, lässt sich der zeitliche Verlauf der Stromstärke I wie folgt beschreiben (I in Ampère, t in Sekunden):

$$I(t) = 6,0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L} \cdot t}\right); \; t \geq 0$$

a) Berechnen Sie in Abhängigkeit von R und L den Zeitpunkt t_1, an dem die Stromstärke die Hälfte von $I_{max} = 6,0$ erreicht.

b) Der Zeitpunkt t_1 wird gemessen, und man erhält $t_1 = 2,2$. Berechnen Sie den Zeitpunkt t_2, an dem die Stromstärke 80% des Maximalwerts beträgt.

c) Berechnen Sie die erste Ableitung $\dot{I}(t)$; diese sei für $t \in]0;10[$ definiert. Berechnen Sie den Grenzwert der Ableitung für $t \rightarrow 0$ und daraus den Steigungswinkel des Funktionsgraphen von I(t) an der Stelle t = 0.

d) Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse den Graph der Funktion I(t) und dessen Asymptote für $0 \leq t \leq 10$.
(nach Abschlussprüfung 2003/Nachtermin)

1. a) $Q_0 = 520$ (C) b) $t_1 = 4 \ln 2 \approx 2{,}77$ (s) c) $I(t) = 130 \cdot e^{-0{,}25t}$ e) $t_2 = 4 \ln 20 \approx 12$ (s)

d) rechnerisch: I ist eine fallende Exponentialfunktion (bzw. $\dot{I}(t) = -32{,}5 \cdot e^{-0{,}25t} < 0$)

physikalisch: je stärker der Kondensator aufgeladen ist, desto größer ist die Spannung am Kondensator; diese wirkt der weiteren Aufladung entgegen ➔ der Strom nimmt immer mehr ab; $I_{max} = I(0) = 130$ (A)

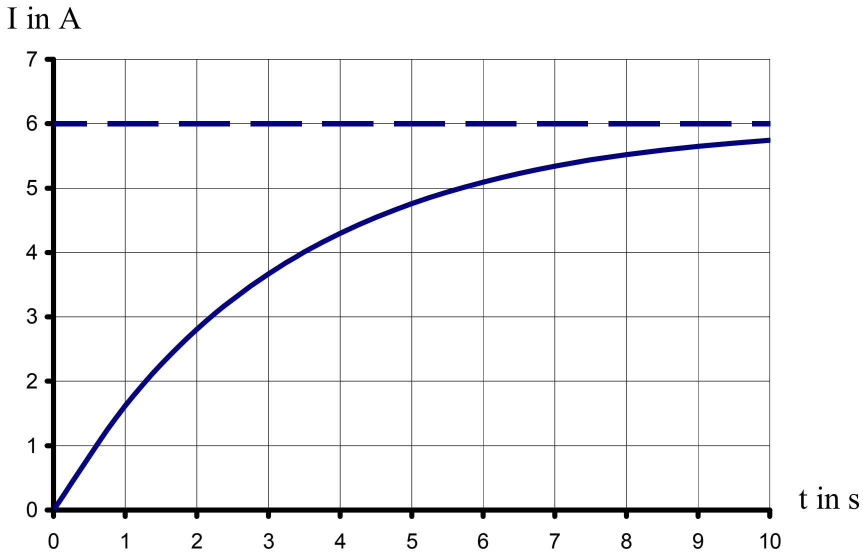
f)

g) $\int_0^{t_2} I(t)dt = \int_0^{t_2} \dot{Q}(t)dt = Q(t_2) - Q(0)$ (Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung); da $Q(0) = 0$, ist dies die bis zum Zeitpunkt t_2 transportierte Ladung; im Graphen entspricht dies der Fläche unter der Kurve zwischen $t = 0$ und $t = t_2$; $Q(12) = 494$ (C), das sind 95% der insgesamt möglichen Ladung

2. a) $t_1 = \frac{L}{R} \cdot \ln 2$ b) $t_2 = \frac{L}{R} \cdot \ln 5 = t_1 \cdot \frac{\ln 5}{\ln 2} \approx 5{,}11$ (s)

c) $\dot{I}(t) = 6{,}0 \cdot \frac{R}{L} \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$; $\lim\limits_{t \to 0} \dot{I}(t) = 6{,}0 \cdot \frac{R}{L} = 6{,}0 \cdot \frac{\ln 2}{t_1} \approx 1{,}89$ (A/s) $= \tan \alpha$ ➔ $\alpha \approx 62{,}1°$

d)



Gruppenarbeit: Anwendungen von Exponential- und zusammengesetzten Funktionen

Gruppe C: Wahrscheinlichkeits-Verteilungen

1. Die Gleichung der Normalverteilung f(x) = $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ (vgl. alter 10 DM-Schein unten!), wobei die Parameter μ den Erwartungswert (Mittelwert) und σ die Standardabweichung (mittlere Abweichung) darstellen, ist für die Statistik von großer Bedeutung. Hier soll die Normalverteilung in Abhängigkeit von dem Parameter μ diskutiert werden, wobei $\sigma = \sqrt{0{,}5}$ gesetzt und der konstante Vorfaktor nicht berücksichtigt wird, also: $f_\mu(x) = e^{-(x-\mu)^2}$ mit $x, \mu \in \mathbb{R}$.

a) Untersuchen Sie das Grenzverhalten der Funktion und geben Sie die Asymptote des Graphen an.

b) Bestimmen Sie die 1. und 2. Ableitungsfunktion von f_μ.

c) Bestimmen Sie die Koordinaten der Hoch-, Tief- und Wendepunkte.

d) Zeichen Sie G_{f_2} ($\mu = 2$) im Bereich $0 \le x \le 4$ (x-Achse: 1 LE = 4 cm!).

2. In der Statistischen Physik ist die sogenannten „Maxwell-Boltzmann-Verteilung" von großer Bedeutung. Dies ist eine Funktion, welche die Wahrscheinlichkeit dafür angibt, dass in einem Gas bei der Temperatur T (in Kelvin) ein Teilchen eine Geschwindigkeit zwischen v und v + dv (in m/s) hat. Diese Wahrscheinlichkeit P ist gegeben durch:

$$P(\mathrm{v}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{m}{kT}\right)^{3/2} \mathrm{v}^2 e^{-m\mathrm{v}^2/2kT},$$

wobei m die Masse eines Gasteilchens ist und k die sogenannte Boltzmann-Konstante.

Zur Vereinfachung betrachten wir hier die Funktion

$$f(x) = x^2\, e^{-x^2};\ x \ge 0.$$

Berechnen Sie die Grenzwerte dieser Funktion für $x \to 0$ und $x \to \infty$ und ermitteln Sie Art und Lage ihrer Extrema. Zeichnen Sie den Graph für $0 \le x \le 3$ (x-Achse: 1 LE = 5 cm!).

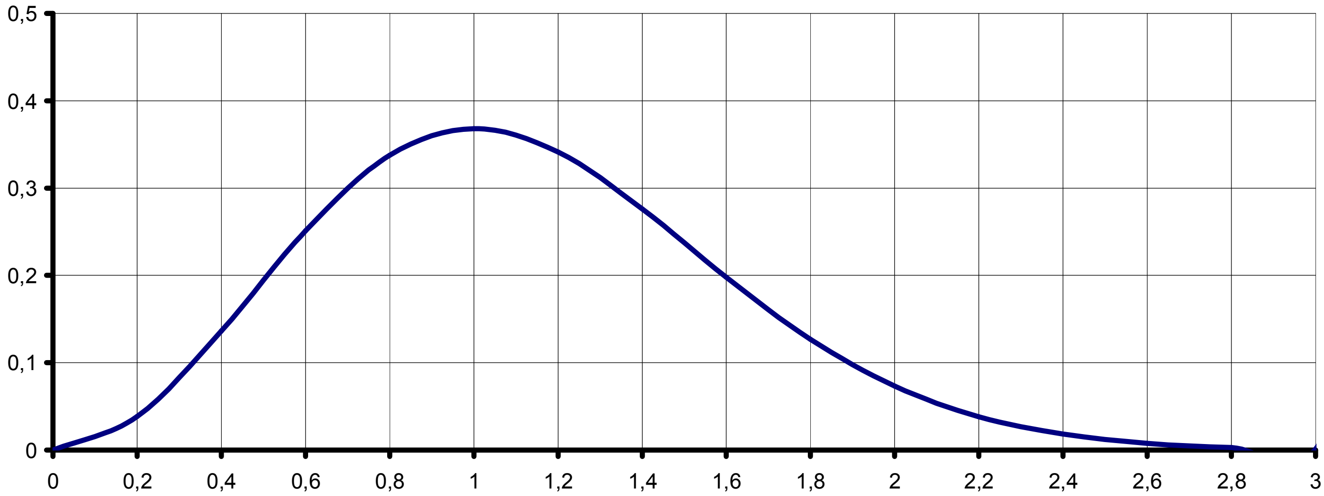
1. a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_\mu(x) = 0$ ➔ Asymptote: x-Achse

b) $f_\mu'(x) = -2\,(x-\mu)\;e^{-(x-\mu)^2}$; $f_\mu''(x) = (4\,(x-\mu)^2 - 2)\;e^{-(x-\mu)^2}$ c) HoP($-\mu$; 1); $\text{WeP}_{1,2}\left(\mu \pm \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$

d)

2. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ (mit de l'Hopital)

$f'(x) = (2x - 2x^3)\;e^{-x^2}$ ➔ TiP(0|0); HoP(1; e^{-1})



Gruppenarbeit: Anwendungen von Exponential- und zusammengesetzten Funktionen

Gruppe D: Gedämpfte Schwingungen und Temperaturausgleich

1. Bei einer bestimmten gedämpften Schwingung kann mathematisch idealisiert die Auslenkung s (in cm) in Abhängigkeit von der Zeit t (in Sekunden) folgendermaßen beschrieben werden:

$$s(t) = 4 \cdot e^{-t} \cdot [\cos(5t) + 0{,}2 \sin(5t)],\ t \geq 0.$$

a) Bilden Sie die erste Ableitung von s(t) nach der Zeit. Berechnen Sie die Extremalstellen und begründen Sie, dass die Hochpunkte alle auf dem Graph der Funktion $y = 4 \cdot e^{-t}$, die Tiefpunkte alle auf dem Graph der Funktion $y = -4 \cdot e^{-t}$ liegen.
(zur Kontrolle: $\dot{s}(t) = -20{,}8 \cdot e^{-t} \cdot \sin(5t)$)
b) Zeigen Sie, dass die Zeitdifferenz zwischen zwei unmittelbar aufeinander folgenden Maxima der Auslenkung konstant $\Delta t = 0{,}4 \cdot \pi$ beträgt. Berechnen Sie, auf wie viel Prozent die Auslenkung von einem beliebigen Maximum zum nächsten Maximum abnimmt.
c) Der schwingende Körper habe die Masse m = 0,200 kg. Ermitteln Sie damit die Funktion $E_{kin}(t)$, die jedem Zeitpunkt t die kinetische Energie zuordnet.
d) Zeichnen Sie die Graphen von s und von E_{kin} ($0 \leq t \leq \pi$)
(nach Abschlussprüfung 2001)

2. Bringt man zwei Körper unterschiedlicher Temperatur miteinander in Kontakt, so kühlt sich der heißere ab, der kältere erwärmt sich (z. B. kühlt sich heißer Kaffee auf Zimmertemperatur ab, das Zimmer erwärmt sich dabei – allerdings unmerklich leicht). Untersuchungen zeigen, dass die Temperatur***differenz*** (***nicht*** die Temperatur!) d zwischen beiden Körpern dabei exponentiell abnimmt, es gilt also:

$$d = d_0\, e^{-kt}$$

mit einer Anfangs-Temperatur***differenz*** d_0 und einer Konstanten k, die angibt, wie schnell der Temperaturausgleich vor sich geht.
a) Ein Fieberthermometer hat anfangs die Temperatur 20°C. Nach einer halben Minute Messzeit liest man 29°C ab. Wie lange muss man warten, bis eine Fiebertemperatur von 39°C bis auf 0,1° genau angezeigt wird? (die Änderung der Temperatur des Körpers kann hier vernachlässigt werden)
b) Skizzieren Sie die Temperatur des Thermometers und die zugehörige Asymptote in Abhängigkeit von der Zeit ($0 \leq t \leq 4$ min).

1. a) $\dot{s}(t) = -20{,}8\ e^{-t} \sin(5t)$ ➔ Maximalstellen: $0{,}2\pi k$ (k gerade); Minimalstellen: $0{,}2\pi k$ (k ungerade)

$s(t_E) = 4\ e^{-t_E}\ (\cos(k\pi) + 0{,}2\ \sin(k\pi))$

$\sin(k\pi) = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$; $\cos(k\pi) = +1$ für k gerade, $= -1$ für k ungerade

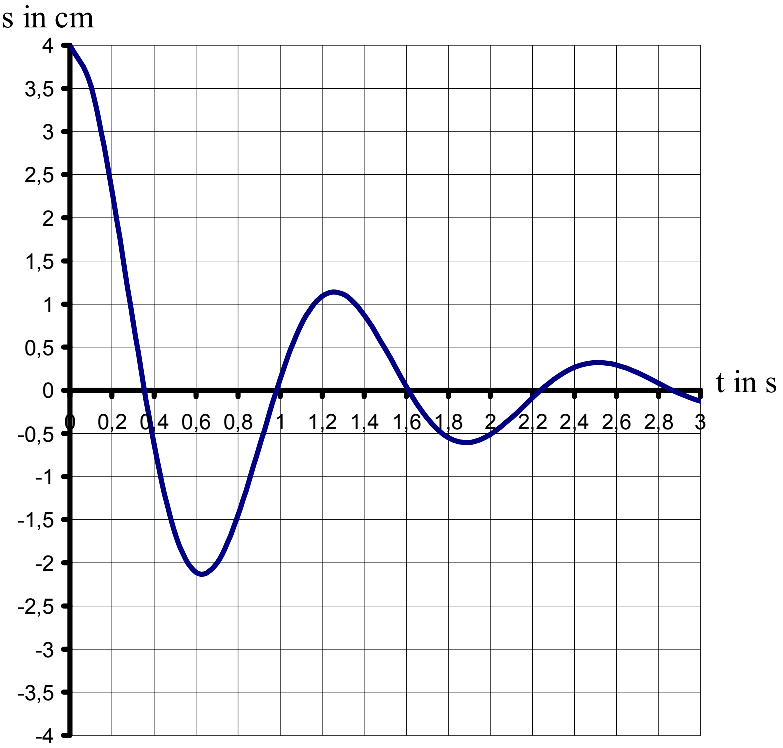
➔ HoP liegen auf Graph von $y = 4 \cdot e^{-t}$, TiP liegen auf Graph von $y = -4 \cdot e^{-t}$

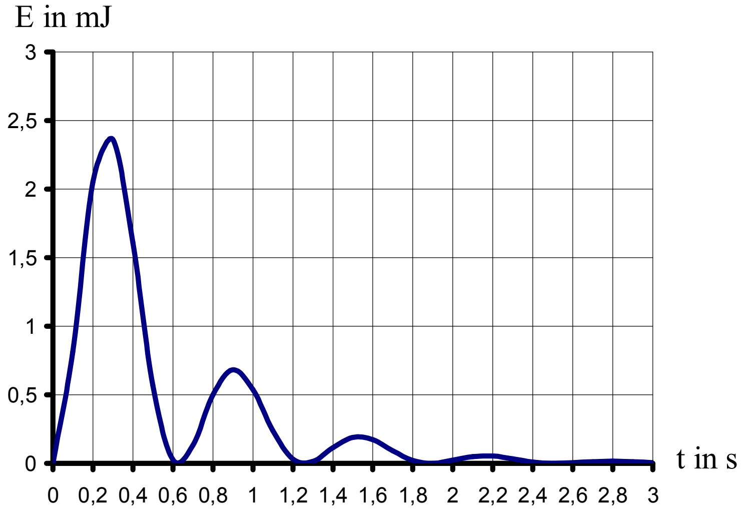
b) ein Maximum bei $0{,}2\pi k$ (k gerade) ➔ das nächste ist bei $0{,}2\pi\ (k + 2)$ ➔ Abstand: $0{,}4\pi$

$e^{-0{,}4\pi} \approx 0{,}285$ ➔ Amplitude nimmt auf etwa 28,5% ab

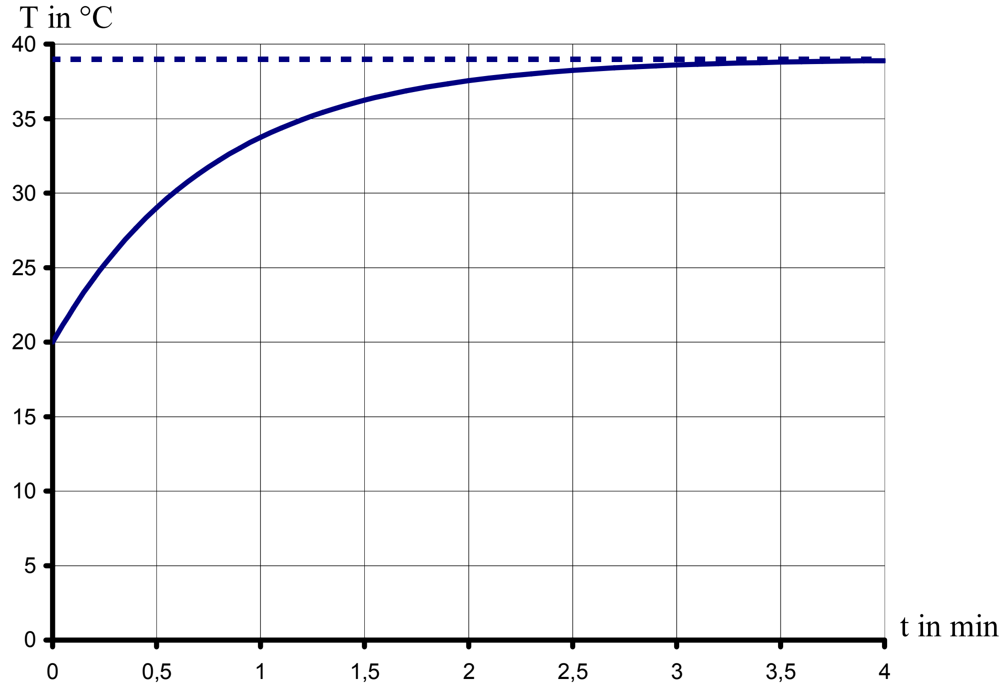
c) $E_{kin}(t) = 4{,}3264\ \text{mJ} \cdot e^{-2t} \cdot \sin^2(5t)$

d)





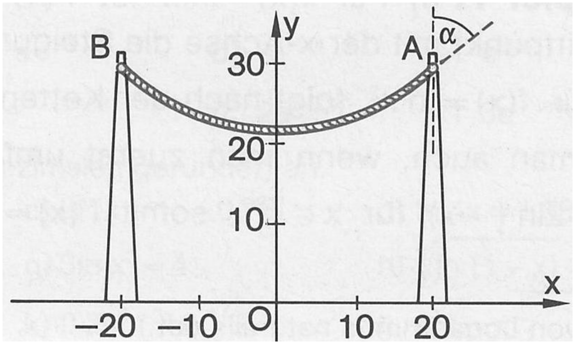
2. a) $k = 2\ \ln\dfrac{19}{10} \approx 1{,}284$; $\quad t = \dfrac{\ln\frac{19}{0{,}1}}{k} \approx 4{,}1$ (min) b)



Gruppenarbeit: Anwendungen von Exponential- und zusammengesetzten Funktionen

Gruppe E: Hyperbelfunktionen

1. Eine an ihren Enden befestigte, freihängende Kette (oder ein Kabel, oder ein Seil usw.) bildet eine sogenannte Kettenlinie. Legt man das Koordinatensystem wie in der Skizze unten dargestellt, so kann man diese Kurve durch eine Gleichung der Form $y = a\,(e^{kx} + e^{-kx})$ beschreiben.



Speziell die Funktion $f(x) = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$ ($a = \frac{1}{2}$, $k = 1$) wird auch als „Kosinus hyperbolicus“ bezeichnet und mit cosh abgekürzt; man kann die Kettenlinie also auch mit $y = 2a\cdot\cosh(kx)$ beschreiben.

a) Es sei $a = 11$, $k = 0{,}04$. Der Abstand der beiden Befestigungsmasten betrage 40 (alle Längen in m). In welcher Höhe ist die Kette befestigt? Wie weit hängt sie durch?

b) Welchen Winkel α mit der Vertikalen bildet die Kette im Aufhängepunkt A?

c) Stellen Sie die Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion auf, deren Graph ebenfalls durch A und B geht und in A mit der Vertikalen denselben Winkel α bildet wie die Kettenlinie.

d) Wie weit unterhalb des tiefsten Punktes der Kettenlinie liegt der Scheitel der Parabel zu dieser quadratischen Funktion?

2. Fällt ein Körper in Luft, so wirkt neben der Gewichtskraft nach unten auch noch die Luftwiderstandskraft nach oben auf ihn; letztere ist proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit v („Newtonsche Reibung“). Insgesamt ergibt sich für die Beschleunigung daraus $a = \dot{v} = g - kv^2$ mit einer Konstanten k. Aus dieser Gleichung kann man das Zeit-Geschwindigkeits-Gesetz bestimmen; es ergibt sich (wenn der Körper zur Zeit $t = 0$ in Ruhe ist):

$$v(t) = \sqrt{\frac{g}{k}}\,\frac{e^{\sqrt{kg}\cdot t} - e^{-\sqrt{kg}\cdot t}}{e^{\sqrt{kg}\cdot t} + e^{-\sqrt{kg}\cdot t}} \quad \text{für } t \geq 0$$

mit der Fallbeschleunigung $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$. Zur Vereinfachung betrachten wir im Folgenden statt dessen nur die Funktion f mit dem Term

$$f(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

Diese Funktion wird auch als „Tangens hyperbolicus“ bezeichnet und mit tanh abgekürzt

a) Berechnen Sie f(0) und den Grenzwert von f für $x \to \infty$ und interpretieren Sie die Ergebnisse im Sachzusammenhang.

b) Ermitteln Sie erste Ableitung von f. Was gibt diese Ableitung im Sachzusammenhang an?

c) Berechnen Sie $f\,'(0)$ und den Grenzwert von $f\,'$ für $x \to \infty$ und interpretieren Sie die Ergebnisse im Sachzusammenhang.

d) Zeigen Sie, dass

$$F(x) = \ln\,(e^{x} + e^{-x})$$

eine Stammfunktion zu f(x) ist, und berechnen Sie damit das Integral über f zwischen $x = 0$ und $x = 1$. Was gibt der Wert dieses Integrals im Sachzusammenhang an?

3. Außer dem Kosinus hyperbolicus und dem Tangens hyperbolicus gibt es auch den „Sinus hyperbolicus“; für diesen gilt: $\sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

a) Zeigen Sie: Zwischen sinh, cosh und tanh gilt (wie bei sin, cos und tan auch!) der Zusammenhang $\tanh(x) = \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$.

b) Berechnen Sie $(\cosh(x))^2 - (\sinh(x))^2$. Welche ähnliche Beziehung gibt es bei sin und cos?

c) Berechnen Sie jeweils die Ableitungen von sinh, cosh, tanh und vergleichen Sie die Ergebnisse mit den entsprechenden Ergebnissen bei sin, cos und tan.

1. a) h $\approx$ 29,4 m; hängt etwa 7,4 m durch
b) $\approx$ 52° c) f(x) $\approx$ $0{,}0195x^2 + 21{,}6$ ➔ etwa 0,4 m unterhalb

2. a) f(0) = 0; $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$ ➔ am Anfang Geschwindigkeit 0 (Ruhe); Grenzgeschwindigkeit 1

b) $f'(x) = \dfrac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$ (Beschleunigung)

c) f '(0) = 1; $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$ ➔ am Anfang Beschleunigung 1; Grenzbeschleunigung 0

d) F'(x) = ... = f(x) ➔ F ist Stammfunktion zu f; $\int\limits_0^1 f(x)dx = [F(x)]_0^1 = \ln\left(e + \frac{1}{e}\right) - \ln 2 \approx 0{,}434$

(durchfallene Strecke)

3.
a) Im Bruch sinh(x)/cosh(x) kürzt sich der Faktor 1/2, und es bleibt der Term von tanh(x).

b) $(\cosh(x))^2 - (\sinh(x))^2 = \dfrac{(e^x + e^{-x})^2}{4} - \dfrac{(e^x - e^{-x})^2}{4} = \dfrac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \dfrac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \dfrac{4}{4} = 1.$
Dies ist fast dasselbe wie die Formel $(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 = 1$.

c) sinh'(x) = cosh(x) (wie bei sin und cos!)
cosh'(x) = sinh(x) (anders als bei cos und sin – kein Minus!)
$\tanh'(x) = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$ (wie bei tan und cos)

zum Kosinus hyperbolicus siehe auch „The calculus diaries“, S. 202-210