Weitere Flächenberechnungen mit Integralen

Bereits bekannt ist, dass für eine Funktion f, deren Graph über der x-Achse verläuft ($f \geq 0$), das Integral

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

den Inhalt A der Fläche ergibt, die vom Graphen und der x-Achse zwischen a und b (mit $b > a$) eingeschlossen ist.

Zunächst werden jetzt Graphen betrachtet, die unterhalb der x-Achse liegen.
1) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen $f(x) = x^2 - 1$ und $g(x) = -x^2 + 1$ und berechnen Sie die Integrale $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ und $\int_{-1}^{1} g(x)dx$. Was haben diese Integrale jeweils mit den Inhalten der Flächen zu tun, die von den Graphen und der x-Achse eingeschlossen werden? Formulieren Sie eine allgemeine Regel für den Zusammenhang von Inhalten von Flächen unter der x-Achse und Integralen.

2) Benutzen Sie die oben gefundene Regel, um den gesamten Inhalt der beiden Flächen zu berechnen, die der Graph von $f(x) = x^3 - x$ mit der x-Achse einschließt. (Tipp: zunächst Nullstellen berechnen und Graph skizzieren!)

Oft interessieren aber auch Flächen, die auf zwei Seiten keine „flache“ Begrenzung haben, das heißt, zwei Seiten werden durch allgemeine Funktionen beschrieben. Zu berechnen ist also der Inhalt einer Fläche, die von zwei Funktionsgraphen eingeschlossen ist.

Bitte wenden!

3) Berechnen Sie die Inhalte der Flächen, die jeweils von den Graphen der Funktionen f und g mit $f(x) = x$ bzw. $g(x) = x^2$ und der x-Achse zwischen 0 und 1 eingeschlossen werden (Skizze!). Berechnen Sie damit den Inhalt der Fläche, die von den Graphen von f und g eingeschlossen wird.

4) Begründen Sie, warum man stattdessen auch einfach das Integral der Differenzfunktion hätte berechnen können. Welche der Funktione muss man dabei von welcher abziehen, damit sich ein positives Ergebnis ergibt?

An Hand von Skizzen kann man sich leicht überlegen, dass die Regel in (4) auch weiterhin gilt, wenn ein oder beide Funktionsgraphen unter der x-Achse verlaufen.

5) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Graphen von $f(x) = x^3 - x^2$ und $g(x) = x^3 - 1$ eingeschlossen wird (Skizze!).