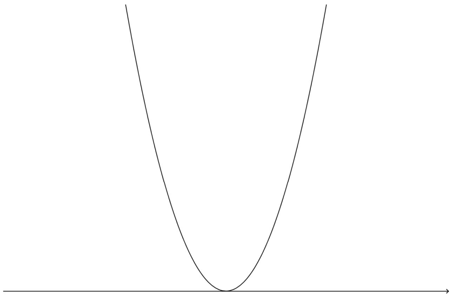
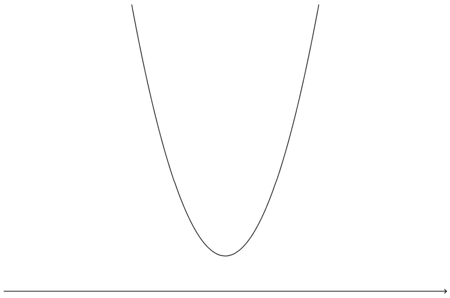
Nützliche Faustregeln

1. (a) Hat die Funktion selbst eine Nullstelle mit gerader Vielfachheit (z. B. doppelt), so hat ihr Graph dort immer einen Extrempunkt – umgedreht ist aber nicht bei jedem Extrempunkt eine doppelte Nullstelle!

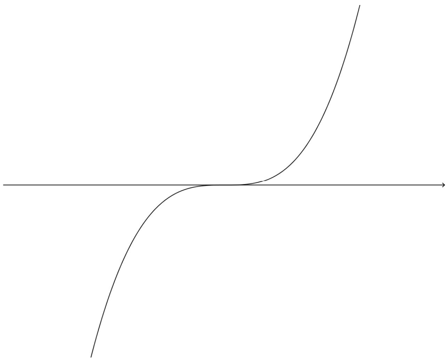


doppelte Nullstelle von f ➔ Extrempunkt

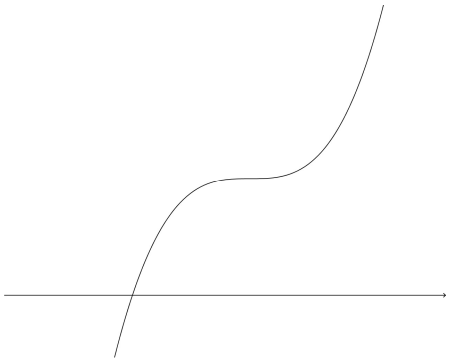


Extrempunkt, aber keine doppelte Nullstelle von f!

(b) Hat die Funktion selbst eine Nullstelle mit ungerader Vielfachheit größer oder gleich 3 (z. B. dreifach), so hat ihr Graph dort immer einen Terrassenpunkt – umgedreht ist aber nicht bei jedem Terrassenpunkt eine dreifache Nullstelle!



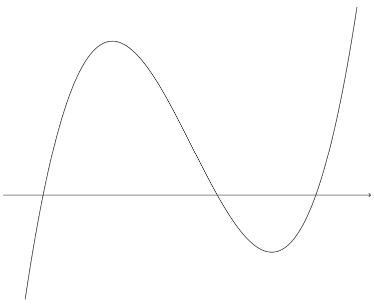
dreifache Nullstelle von f ➔ Terrassenpunkt



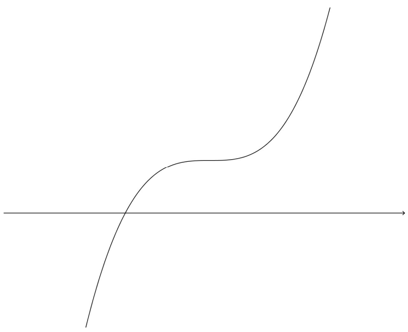
Terrassenpunkt, aber keine dreifache Nullstelle von f!

2. Hat die Funktion den Grad n, so gibt es höchstens n–1 Stellen mit waagrechter Tangente, also höchstens n–1 Extrempunkte. (Grundwissen!)

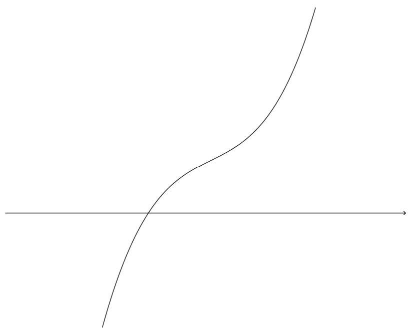
   Außerdem gilt aber auch: ist n gerade/ungerade, so ist die Gesamtzahl der Extrempunkte ungerade/gerade. Insbesondere folgt:
   - Der Graph einer Funktion dritten Grades kann entweder zwei oder keinen Extrempunkt haben; im ersten Fall muss es natürlich ein Hoch- und ein Tiefpunkt sein. Wenn es keinen Extrempunkt gibt, kann es aber dennoch zumindest einen Terrassenpunkt geben – muss es aber nicht.



zwei Extrempunkte:
ein HoP, ein TiP



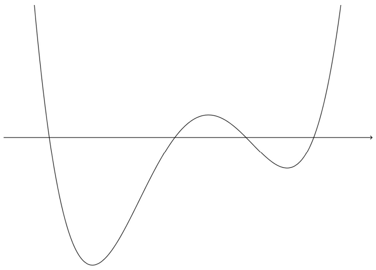
kein Extrempunkt,
aber ein TeP



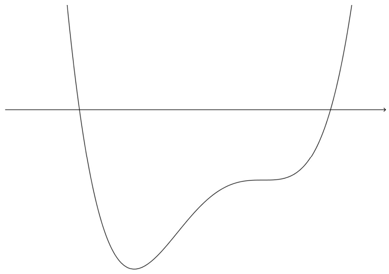
weder Extrem- noch
Terrassenpunkt

(gezeigt sind hier die Fälle, bei denen der Graph von unten nach oben verläuft – umgedreht geht's natürlich auch)

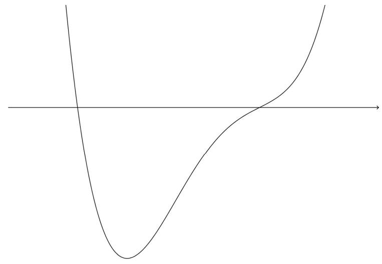
- Der Graph einer Funktion vierten Grades kann drei oder einen Extrempunkt haben. Im ersten Fall sind es entweder ein Hochpunkt und zwei Tiefpunkte oder umgedreht, im zweiten Fall kann es ein Hoch- oder ein Tiefpunkt sein. Wenn es nur einen Extrempunkt gibt, kann es außerdem zusätzlich auch noch einen Terrassenpunkt geben – muss es aber nicht.



drei Extrempunkte:
ein HoP, zwei TiP



ein Extrempunkt (TiP), ein TeP



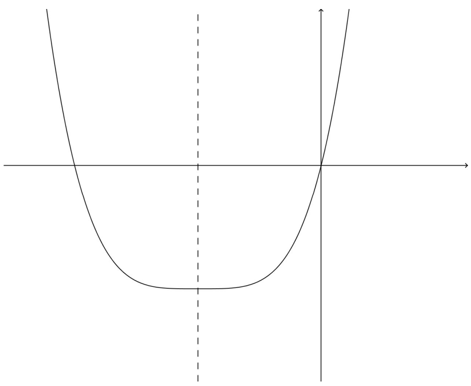
ein Extrempunkt (TiP),
kein TeP

(gezeigt sind hier die Fälle, bei denen der Graph von oben nach oben verläuft – umgedreht geht's natürlich auch)

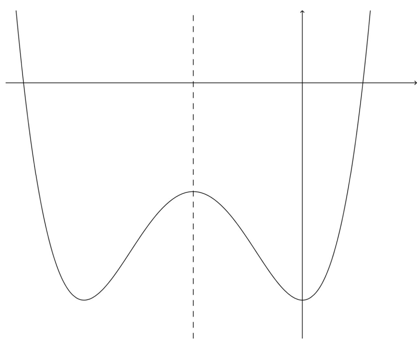
3. Hat die Funktion den Grad n, so gibt es höchstens n–2 Flachstellen, also höchstens n–2 Wendepunkte. (Grundwissen!)

   Außerdem gilt aber auch: ist n gerade/ungerade, so ist die Gesamtzahl der Wendepunkte gerade/ungerade. Insbesondere folgt:
   - Der Graph einer Funktion dritten Grades hat immer genau einen Wendepunkt.
   - Der Graph einer Funktion vierten Grades kann keinen oder zwei Wendepunkte haben.

4. (a) Der Graph einer Funktion dritten Grades ist immer symmetrisch zu seinem Wendepunkt (siehe die Beispiele in 2.).
   (b) Der Graph einer Funktion vierten Grades kann symmetrisch zu einer Achse sein (nicht unbedingt die y-Achse!), muss es aber nicht (siehe die Beispiele in 2.). Wenn er achsensymmetrisch ist, so verläuft die Achse immer durch den einzigen bzw. durch den mittleren der drei Extrempunkte.



symmetrisch zur Achse durch
den einzigen Extrempunkt (TiP)



symmetrisch zur Achse durch den
mittleren Extrempunkt (HoP)

5. (a) Ist der Graph einer ganzrationalen Funktion vom Grad größer oder gleich zwei symmetrisch zur y-Achse, so befindet sich immer ein Extrempunkt auf der y-Achse.
   (b) Ist der Graph einer ganzrationalen Funktion vom Grad größer oder gleich drei symmetrisch zum Ursprung, so ist der Ursprung immer ein Wendepunkt.

6. (a) Ist eine ungerade Anzahl von Ableitungen an einer Stelle gleich null (die Ableitung, die als erstes ungleich 0 ist, hat also eine gerade Anzahl, z. B. die vierte Ableitung), dann ist dort ein Extrempunkt des Funktionsgraphen.
(b) Ist eine gerade Anzahl von Ableitungen an einer Stelle gleich null (die Ableitung, die als erstes ungleich 0 ist, hat also eine ungerade Anzahl, z. B. die fünfte Ableitung), dann ist dort ein Wendepunkt des Funktionsgraphen.
(c) Vorsicht: Das gilt umgekehrt nicht! Beispielsweise gilt für die Funktion
$f(x) = \begin{cases} 2^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, dass *alle* Ableitungen an der Stelle 0 gleich null sind; trotzdem hat ihr Graph dort einen Extrempunkt. Für die Funktion $f(x) = \begin{cases} x \cdot 2^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ gilt ebenfalls, dass *alle* Ableitungen an der Stelle 0 gleich null sind; trotzdem hat ihr Graph dort einen Wendepunkt.