Typische Fallunterscheidungen bei ganzrationalen Funktionenscharen

<u>I) Nullstellen</u> *(kommt in praktisch jeder Prüfung vor!)*
Bestimme zunächst alle Nullstellen. Untersuche dann

a) ob der Parameter unter einer Wurzel steht – dann muss man die drei Fälle
   1) D < 0, 2) D = 0, 3) D > 0 beachten
b) *selten:* ob der Parameter im Nenner eines Bruchs steht – dann muss man die beiden Fälle
   1) Nenner = 0, 2) Nenner $\neq 0$ beachten
c) ob einige der Nullstellen für manche Fälle evtl. gleich sind; diese Fälle jeweils einzeln angeben, am Schluss dann noch einen Fall „sonst" (wenn also keine der Nullstellen gleich sind)

Für jeden Fall müssen die Vielfachheiten getrennt untersucht werden, und der Wert des Parameters muss angegeben / berechnet werden!

Beispiel 1: $f_k(x) = x\,(x + k)\,(x - k - 1)$
$x\,(x + k)\,(x - k - 1) = 0 \Longrightarrow x_1 = 0;\ x_2 = -k;\ x_3 = k + 1$

a) kein k unter einer Wurzel – nichts zu tun!
b) kein k im Nenner eines Bruchs – nichts zu tun!
c) einige der Nullstellen können gleich sein! (evtl. NR machen: $x_1 = x_2 \Longrightarrow 0 = -k \Longrightarrow k = 0$; $x_1 = x_3 \Longrightarrow 0 = k + 1 \Rightarrow k = -1$; $x_2 = x_3 \Longrightarrow -k = k + 1 \Longrightarrow k = -0{,}5$)
   1) $k = 0$: $x_1 = x_2 = 0$ (doppelt); $x_3 = 1$ (einfach)
   2) $k = -1$: $x_1 = x_3 = 0$ (doppelt); $x_2 = 1$ (einfach)
   3) $k = -0{,}5$: $x_1 = 0$ (einfach); $x_2 = x_3 = 0{,}5$ (doppelt)
   4) sonst (also $k \neq 0$ und $\neq -1$ und $\neq -0{,}5$): $x_1 = 0$; $x_2 = -k$; $x_3 = k + 1$ (alle einfach)

Beispiel 2: $f_t(x) = x^3 - (t - 4)\,x^2 - 4\,t\,x$
$x^3 - (t - 4)\,x^2 - 4\,t\,x = 0 \Rightarrow x\,(x^2 - (t - 4)\,x - 4\,t) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

$$x^2 - (t - 4)\,x - 4\,t = 0 \Rightarrow x_{2,3} = \frac{t-4 \pm \sqrt{(t-4)^2 + 16t}}{2} = \frac{t-4 \pm \sqrt{t^2 - 8t + 16 + 16t}}{2} = \frac{t-4 \pm \sqrt{t^2 + 8t + 16}}{2}$$

$$= \frac{t-4 \pm \sqrt{(t+4)^2}}{2} = \frac{t-4 \pm (t+4)}{2} \Rightarrow x_2 = -4;\ x_3 = t$$ *(alternativ: Satz von Vieta verwenden)*

a) kein t unter einer Wurzel – nichts zu tun!
b) kein t im Nenner eines Bruchs – nichts zu tun!
c) einige der Nullstellen können gleich sein! (evtl. NR machen: $x_1 = x_2 \Longrightarrow 0 = -4$ geht nicht; $x_1 = x_3 \Longrightarrow 0 = t$; $x_2 = x_3 \Longrightarrow -4 = t$)
   1) $t = 0$: $x_1 = x_3 = 0$ (doppelt); $x_2 = -4$ (einfach)
   2) $t = -4$: $x_1 = 0$ (einfach); $x_2 = x_3 = -4$ (doppelt)
   3) sonst (also $t \neq 0$ und $\neq -4$): $x_1 = 0$; $x_2 = -4$; $x_3 = t$ (alle einfach)

Beispiel 3: $f_a(x) = 3\,x^2 + 18\,x + a - 10$

$$3\,x^2 + 18\,x + a - 10 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-18 \pm \sqrt{18^2 - 4 \cdot 3 \cdot (a-10)}}{2 \cdot 3} = \frac{-18 \pm \sqrt{444 - 12a}}{6}$$

a) unter der Wurzel steht ein a, also drei Fälle! $D = 444 - 12a$
   1) $D < 0 \Longrightarrow 444 - 12a < 0 \Longrightarrow a > 37$: keine Nullstellen
   2) $D = 0 \Longrightarrow a = 37$: $x_1 = x_2 = -3$ (doppelt)
   3) $D > 0 \Longrightarrow a < 37$: $x_{1.2} = \ = \dfrac{-18 \pm \sqrt{444 - 12a}}{6}$ (beide einfach)
b) kein a im Nenner eines Bruchs – nichts zu tun!
c) Nullstellen können gleich sein, nämlich $x_1 = x_2$; das ist aber in Fall 2 schon erledigt

Beispiel 4: $f_a(x) = x\,(x-1)\,(a\,x-1)$

$x\,(x-1)\,(a\,x-1) = 0 \Longrightarrow x_1 = 0;\ x_2 = 1;\ x_3 = \frac{1}{a}$

a) kein a unter einer Wurzel – nichts zu tun!
b) a im Nenner eines Bruchs, also zwei Fälle!
   1) Nenner = 0 $\Longrightarrow a = 0$: $x_1 = 0;\ x_2 = 1$ (beide einfach)
   2) Nenner $\neq 0 \Longrightarrow a \neq 0$ (und $\neq 1$, s.u.): $x_1 = 0;\ x_2 = 1;\ x_3 = \frac{1}{a}$ (alle einfach)
c) Nullstellen können gleich sein, nämlich $x_2 = x_3 \Longrightarrow a = 1$: $x_1 = 0$ (einfach); $x_{2,3} = 1$ (doppelt)

<u>II) Symmetrie</u> *(seltener, aber z. B. NT 2012–AII/2.1)*

Untersuche, für welche Werte des Parameters der Funktionsterm evtl. nur gerade bzw. nur ungerade Exponenten von x enthält; sonst gibt es keine Symmetrie zum KS.

Beispiel: $f_k(x) = k\,x^3 + (k-1)\,x^2 + k\,x - k + 1$

1) $k = 0$: im Funktionsterm treten nur gerade Potenzen von x auf ➔ Graph ist symmetrisch zur y-Achse

2) $k = 1$: im Funktionsterm treten nur ungerade Potenzen von x auf ➔ Graph ist symmetrisch zum Ursprung

3) sonst (also $k \neq 0$ und $\neq 1$): im Funktionsterm treten gerade und ungerade Potenzen von x auf ➔ keine Symmetrie zum KS

<u>III) Verhalten für $x \to \pm\infty$</u> *(seltener, aber z. B. NT 2005–AII/1.1)*

Untersuche das Vorzeichen des Leitkoeffizienten.

Beispiel: $f_a(x) = (a-1)\,x^4 - x^3$

1) $a - 1 > 0$, also $a > 1$: LK ist positiv, Grad ist gerade ➔ Graph verläuft von links oben nach rechts oben ($f_a(x) \to \infty$ für $x \to \pm\infty$)

2) $a - 1 < 0$, also $a < 1$: LK ist negativ, Grad ist gerade ➔ Graph verläuft von links unten nach rechts unten ($f_a(x) \to -\infty$ für $x \to \pm\infty$)

3) $a - 1 = 0$, also $a = 1$, also $f_1(x) = -x^3$: LK ist negativ, Grad ist ungerade ➔ Graph verläuft von links oben nach rechts unten ($f_a(x) \to \infty$ für $x \to -\infty$ und $f_a(x) \to -\infty$ für $x \to \infty$)