0.1 Lineare Gleichungssysteme

im Folgenden jeweils: $\lambda \in \mathbb{R}$; fast alle Aufgaben aus dem alten Buch (winklers-Verlag)

76/1 a) keine Lsg. b) (2; –1; 0) c) (1; 2; 6)
d) $(-1 + \lambda/3;\ 4 - \lambda/3;\ \lambda)$ oder $(\lambda;\ 3 - \lambda;\ 3 + 3\lambda)$ oder $(3 - \lambda;\ \lambda;\ 12 - 3\lambda)$
e) (–5; –5,5; 3) f) (–3; 6; –4) g) $\left(\frac{63}{11};\frac{73}{22};-\frac{87}{22}\right)$
h) $\left(\lambda;-2+\frac{16}{3}\lambda;-\frac{3}{2}+\frac{17}{6}\lambda\right)$ oder $\left(\frac{3}{8}+\frac{3}{16}\lambda;\lambda;-\frac{7}{16}+\frac{17}{32}\lambda\right)$ oder $\left(\frac{9}{17}+\frac{6}{17}\lambda;\frac{14}{17}+\frac{32}{17}\lambda;\lambda\right)$

81/1 a) (6; 7) b) (2; –1) c) keine Lsg.

81/2 a) $(-1 - \lambda;\ 1;\ \lambda)$ oder $(\lambda;\ 1;\ -1 - \lambda)$ b) $(31 - 2\lambda;\ \lambda;\ 20)$ oder $(\lambda;\ 15{,}5 + \lambda/2;\ 20)$ d) keine Lsg.

altes Buch 11.Klasse (Bildungsverlag EINS) 299f/5
e) $(\lambda;\ 1 - 2{,}4\lambda;\ 1 + 0{,}2\lambda)$ oder $(\frac{5}{12}-\frac{5}{12}\lambda;\ \lambda;\ \frac{13}{12}-\frac{1}{12}\lambda)$ oder $(-5 + 5\lambda;\ 13 - 12\lambda;\ \lambda)$
f) $(\lambda;\ \frac{5}{58}-\frac{12}{29}\lambda;\ \frac{1}{29}-\frac{1}{29}\lambda)$ oder $(\frac{5}{24}-\frac{29}{12}\lambda;\ \lambda;\ \frac{1}{24}-\frac{1}{12}\lambda)$ oder $(-1 + 29\lambda;\ 0{,}5 - 12\lambda;\ \lambda)$

84/2 a) a = 1 oder a = 1,5 b) a = –2

85/3 a) a = 0 b) a = 82 85/4 a) $a = \pm\sqrt{2}$ b) a = –6 oder a = 1,5

85/5 a) z.B.: $(a - 3 - (4+3a)\lambda;\ 1 + (1+a)\lambda;\ \lambda)$ b) z.B.: $(6a - 11 - 0{,}5a\lambda;\ 4 - 2a;\ \lambda)$

0.2 Grundlagen der Vektorrechnung

Grundwissen zu Vektoren:

155/7
a) $\overrightarrow{AH} = \vec{b} + \vec{c}$; $\overrightarrow{AM_1} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$; $\overrightarrow{BM_2} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$; $\overrightarrow{S_2M_2} = \frac{1}{2}\vec{b}$; $\overrightarrow{M_2M_1} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{c}$
b) ja, weil $\overrightarrow{BH} = \vec{b} + \vec{c} - \vec{a} \Longrightarrow \overrightarrow{BM_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BH}$

Blatt (Lambacher-Schweizer Geometrie 2):

227/6 ohne Zeichnung!
a) $\overrightarrow{PR}$ b) $\overrightarrow{AR}$ c) $\overrightarrow{CB}$ d) $\overrightarrow{RQ}$ e) $\overrightarrow{AC}$ f) $\overrightarrow{DA}$ g) $\overrightarrow{RT}$ h) $\overrightarrow{BA}$ i) $\overrightarrow{AD}$ j) $\overrightarrow{PS}$ k) $\overrightarrow{AD}$ l) $\overrightarrow{AD}$

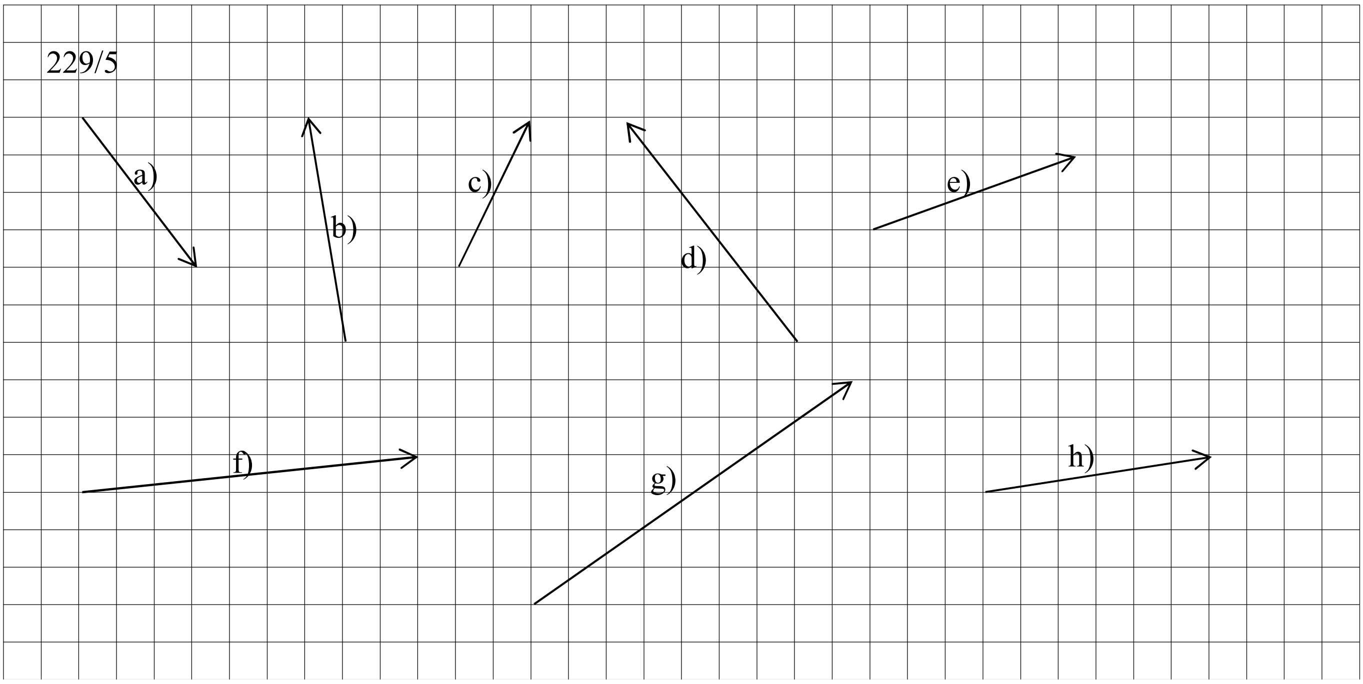
229/4 a) $-\frac{3}{2}\vec{b} + \frac{3}{4}\vec{c}$ b) $6{,}8\vec{a} - 2\vec{c}$ c) $3{,}6\vec{a} - 4{,}5\vec{b}$ d) $\vec{a} - 3{,}3\vec{b}$ e) $8\,\overrightarrow{AB} - 3{,}5\,\overrightarrow{AC}$

229/5 nächste Seite

229/6 $\vec{x} = -\frac{4}{3}\vec{c} + \frac{3}{2}\vec{b}$; $\vec{y} = -\frac{4}{3}\vec{c} + \frac{6}{5}\vec{d}$; $\vec{z} = -\vec{e} + \frac{6}{5}\vec{d}$; $\vec{u} = -\frac{5}{3}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{e}$; $\vec{v} = -\frac{3}{2}\vec{b} + \frac{5}{3}\vec{a}$

229/7 a) Parallelogramm (Trapez) b) zu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ auf beiden Seiten $\overrightarrow{BD}$ addieren

230/14 $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)$; $-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$; $-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; $-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)$; $-2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}$



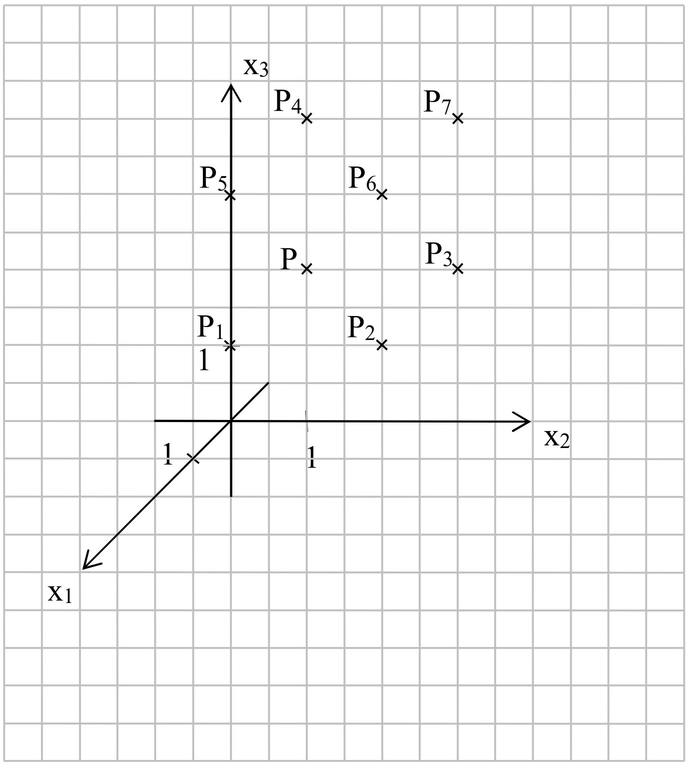
Koordinatendarstellung von Vektoren:

155/1 a) $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ b) $P(4|-5|2)$

155/2 z. B.! a) P(1|0|0) b) P(0|0|1) c) P(0|0|0) d) P(4|0|0) e) P'(1,5|4|2)

155/3 z. B.! a) $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$

155/4 z. B.!
$P_1(4|2|3)$; $P_2(4|4|3)$; $P_3(2|4|3)$; $P_4(2|2|5)$; $P_5(4|2|5)$; $P_6(4|4|5)$; $P_7(2|4|5)$



nach Verschiebung:
P'(4|0|4); $P'_1(6|0|4)$; $P'_2(6|2|4)$; $P'_3(4|2|4)$; $P'_4(4|0|6)$; $P'_5(6|0|6)$; $P'_6(6|2|6)$; $P'_7(4|2|6)$

155/5

a) $\begin{pmatrix} 3{,}5 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -5{,}5 \\ 21 \\ -4 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 0{,}75 \\ -0{,}5 \\ 5 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$

f) $= \vec{u} - \vec{w}$, also (b)

g) $= -(\vec{u} - \vec{w}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix}$

h) $= \overrightarrow{3u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ -15 \end{pmatrix}$

155/6

a) $\vec{x} = \vec{v} - \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

b) $\vec{x} = 2\vec{u} + \vec{w} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

c) $\vec{x} = 2(\vec{v} - \vec{u}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix}$

d) $\vec{x} = 1{,}5\vec{u} - 0{,}5\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$

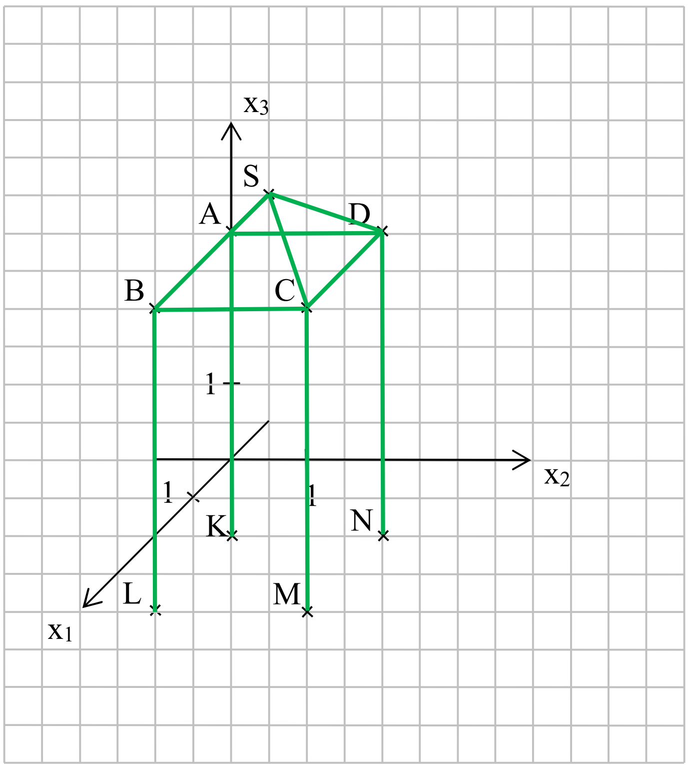
e) $\vec{x} = \vec{w} - \vec{u} - \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$

f) keine Lösung

155/8

a) A(0|0|3); B(2|0|3); C(2|2|3); D(0|2|3); S(1|1|4)

b) *(Maßstab falsch!)*



c) $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) Alle x_3-Koordinaten nehmen um 0,5 ab.

157/6 a) a = 0 b) a = $\sqrt{0{,}2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ c) keine Lösung

Blatt (Lambacher-Schweizer Geometrie 2 bzw. winklers Geometrie 12):
234/5
a) M(4; 4) b) M(1; 1) c) M(–2; 1) d) M(3,5; 5,5; 5) e) M(2; 3; –1,5) f) M(1,25; 0,25; 1,75)

119/4 $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$; $\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$; $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$; $\frac{1}{\sqrt{26}}\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}$; $\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\3\\0\end{pmatrix}$; $\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\\sqrt{3}\\\sqrt{5}\end{pmatrix}$; $\frac{1}{21}\begin{pmatrix}\sqrt{146}\\\sqrt{147}\\\sqrt{148}\end{pmatrix}$

119/5 $s_a = 4{,}5$; $s_b = \sqrt{24{,}75} = 1{,}5\sqrt{11} \approx 4{,}97$; $s_c = \sqrt{58{,}5} = 1{,}5\sqrt{26} \approx 7{,}65$

29/2 a) $\alpha = 4{,}5$; $\beta = -\frac{2}{3}$ b) keine Lösung c) keine Lösung d) ∞ viele Lösungen: $\alpha = -2\lambda$; $\beta = \frac{1}{\lambda}$

0.3 Lineare Unabhängigkeit und Basen

156/1 nein

156/3 grün

156/2
a) Das Gleichungssystem $r\,\vec{u} + s\,\vec{v} + t\,\vec{w} = \vec{0}$ hat unendlich viele Lösungen (Das Gauß-Verfahren führt auf eine Nullzeile.)
b) z. B.: $0\,\vec{u} + 0\,\vec{v} + 0\,\vec{w} = \vec{0}$; $-4\,\vec{u} - 2\,\vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$; $2\,\vec{u} + \vec{v} - 0{,}5\,\vec{w} = \vec{0}$

Übungsblatt (aus Lambacher-Schweizer, Analytische Geometrie, S. 61):
1) a) ja b) nein c) nein
2) a) nein b) ja c) ja d) ja

3) a) $a \neq 1{,}5$ b) $a \neq -1$ und $a \neq 2$ c) kein a d) $a \neq 10$

4) a) $\lambda_1 = 17$; $\lambda_2 = -7$ b) $\lambda_1 = 2$; $\lambda_2 = -5$ c) $\lambda_1 = 2$; $\lambda_2 = -1$ d) $\lambda_1 = -12$; $\lambda_2 = 7$
e) $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = -8$ f) $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 0$ (ohne Rechnung: Vektoren sind l. u.!)

5) a) $\lambda_1 = -1$; $\lambda_2 = 3$; $\lambda_3 = 2$ b) $\lambda_1 = 0{,}5$; $\lambda_2 = 0{,}5$; $\lambda_3 = -0{,}5$ c) $\lambda_1 = 2$; $\lambda_2 = 3$; $\lambda_3 = 4$
d) $\lambda_1 = 1{,}5$; $\lambda_2 = -8{,}5$; $\lambda_3 = 9{,}5$ e) $\lambda_1 = -1$; $\lambda_2 = 3$; $\lambda_3 = 12$ f) $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 0$; $\lambda_3 = 0$ (l. u.!)

0.4 Skalar- und Vektorprodukt

Skalarprodukt:
157/1 a) 1 b) 14

157/2 a) $\approx 32{,}1°$ b) $\approx 95{,}1°$

157/3
$|\overrightarrow{AB}| = c = \sqrt{34} \approx 5{,}83$; $|\overrightarrow{BC}| = a = \sqrt{65} \approx 8{,}06$; $|\overrightarrow{CA}| = b = \sqrt{155} \approx 12{,}45$
$\alpha \approx 31{,}34°$; $\beta \approx 126{,}55°$; $\gamma \approx 22{,}10°$

157/4 $k \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ mit $k \in \mathbb{R}$

157/5 a = 2

157/7
a) prüfe, ob gilt: $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC} = 0$ oder $\overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BC} = 0$ oder $\overrightarrow{CA} \circ \overrightarrow{CB} = 0$
b) prüfe, ob gilt: $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} = 0$ und $\overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BC} = 0$ und $\overrightarrow{CB} \circ \overrightarrow{CD} = 0$
($\overrightarrow{DA} \circ \overrightarrow{DC} = 0$ muss man nicht extra prüfen, das ist dann automatisch erfüllt)
oder prüfe, ob gilt: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ und $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} = 0$ (der Rest ist dann automatisch erfüllt)

157/8

$\vec{a} \circ (s \cdot \vec{b}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \left(s \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} s \cdot b_1 \\ s \cdot b_2 \\ s \cdot b_3 \end{pmatrix}$ (Definition der skalaren Multiplikation)

$= a_1 \cdot (s \cdot b_1) + a_2 \cdot (s \cdot b_2) + a_3 \cdot (s \cdot b_3)$ (Definition des Skalarprodukts)

$= s \cdot (a_1 \cdot b_1) + s \cdot (a_2 \cdot b_2) + s \cdot (a_3 \cdot b_3)$ (A- und K-Gesetz der Multiplikation)

$= s \cdot (a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3)$ (D- Gesetz der Multiplikation)

$= s \cdot \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right) = s \cdot (\vec{a} \circ \vec{b})$ (Definition des Skalarprodukts)

178/5

$\vec{n} \circ \vec{w} = \vec{n} \circ (s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}) = s \cdot (\vec{n} \circ \vec{u}) + t \cdot (\vec{n} \circ \vec{v})$ (D- Gesetz und A-Gesetz des Skalarprodukts)

$= s \cdot 0 + t \cdot 0$ (weil $\vec{n}$ orthogonal zu $\vec{u}$ und zu $\vec{v}$ ist)

$= 0$ ==> $\vec{n}$ ist orthogonal zu $\vec{w}$

Blatt:

1) a) ja b) nein ($\vec{x}^2$ ist Zahl, nicht Vektor) c) ja d) nein (keine Wurzel aus Vektoren definiert)
e) ja f) nein (man kann nicht durch Vektor teilen) g) nein (nicht eindeutig definiert) h) ja
i) nein (links Zahl, rechts Vektor) k) ja l) ja m) nein (man kann nicht durch Vektor teilen)

4) a) $6\vec{a}^2 + 11\vec{a} \circ \vec{b} - 35\vec{b}^2$ b) $\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{a} \circ \vec{b} + 2\vec{a} \circ \vec{c} + 2\vec{b} \circ \vec{c}$
c) $2\vec{a}^2 - 3\vec{b}^2 + \vec{a} \circ \vec{b} - \vec{a} \circ \vec{c} + \vec{b} \circ \vec{c}$ d) $3\vec{a}^2 - 2\vec{b}^2 - 10\vec{c}^2 - \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{c} + 9\vec{b} \circ \vec{c}$
e) $2(\vec{a} \circ \vec{b})(\vec{b} \circ \vec{c})$ f) $(\vec{a} \circ \vec{b})\vec{c}^2 + 2(\vec{a} \circ \vec{b})(\vec{b} \circ \vec{c})(\vec{a} \circ \vec{c}) + (\vec{b} \circ \vec{c})\vec{a}^2$

5) a) 1 b) r c) –1 d) 2 e) r + s 6) a) 0 b) 1 c) 0 d) 13 7) 1; $\vec{a}_0$; 1; $\vec{a}_0$; 1

8) a) –3 b) 3 c) –6 d) 8 9) $-3\vec{c} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$; $\vec{0}$; $3\vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$

11)

a) $r_c = 0{,}18$; $F_c(1{,}18;\ 3{,}26)$; $r_a = \frac{41}{61}$; $F_a(\approx -2{,}03;\ \approx 5{,}64)$; $r_b = \frac{20}{29}$; $F_b(\approx -0{,}55;\ \approx 2{,}62)$

b) $r_c = \frac{20}{38}$; $F_c(\approx 7{,}16;\ \approx 2{,}53;\ \approx -0{,}47)$; $r_a = \frac{3}{7}$; $F_a(\approx 8{,}29;\ \approx 5{,}13;\ \approx 0{,}43)$; $r_b = \frac{6}{11}$;
$F_b(\approx 4{,}91;\ \approx 4{,}74;\ \approx -0{,}09)$

altes Buch (winklers-Verlag Geometrie 12):

41/5 a) $\lambda = 2$ b) $\lambda = 5$ oder $\lambda = 5/7$ 41/6 4200 J

Vektorprodukt:

158/1

a) $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ e) $\sqrt{30}$

c) $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -10 \end{pmatrix}$ f) $= \vec{b} \times \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

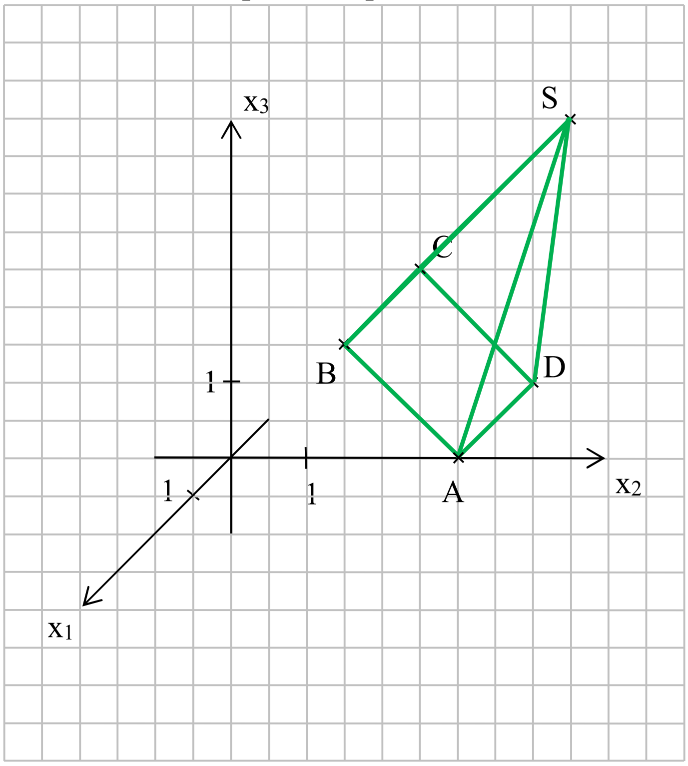
158/2 z. B.: $\begin{pmatrix}-1\\2\\-5\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}1\\-2\\5\end{pmatrix}$

158/3 $A_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{506} \approx 11{,}25$; $A_{BCD} = \frac{1}{2}\sqrt{770} \approx 13{,}87$; $A_{CDA} = \frac{3}{2}\sqrt{185} \approx 20{,}40$

158/4

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ ==> Parallelogramm; $A_{ABCD} = \sqrt{83} \approx 9{,}11$

b) $O = \sqrt{83} + 8\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{107} + \frac{1}{2}\sqrt{323} \approx 34{,}58$



158/5 z. B.: $C(2\sqrt{10}|0|0)$; $D(2-2\sqrt{10}|-1|3)$

altes Buch (winklers-Verlag):

47/2 a) $a_1 = -4$; $b_3 = 1$ b) $a_2 = 1$; $b_1 = 1$

47/3 $a_3 = 7$; $b_3 = -6$

47/4 $b_1 = 14$ oder $b_1 = -17{,}5$

47/6 a) $a_1 = 4$ oder $a_1 = 2$ b) $b_1 = -1$ oder $b_1 = -8{,}2$

47/8 a) $2{,}52 \cdot 10^{-14}\,\text{N}\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$ b) $7{,}2 \cdot 10^{-14}\,\text{N}\begin{pmatrix}-6\\-5\\3\end{pmatrix}$

0.5 Das Spatprodukt

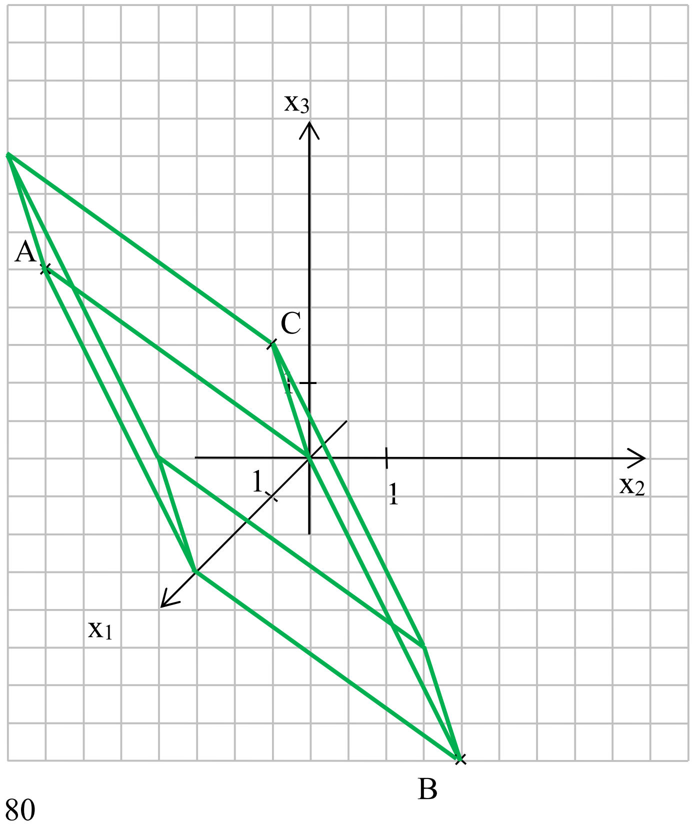
Aufgaben aus Buch 11 fehlen noch!

161/1 a) 125 b) = Volumen des von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aufgespannten Spats

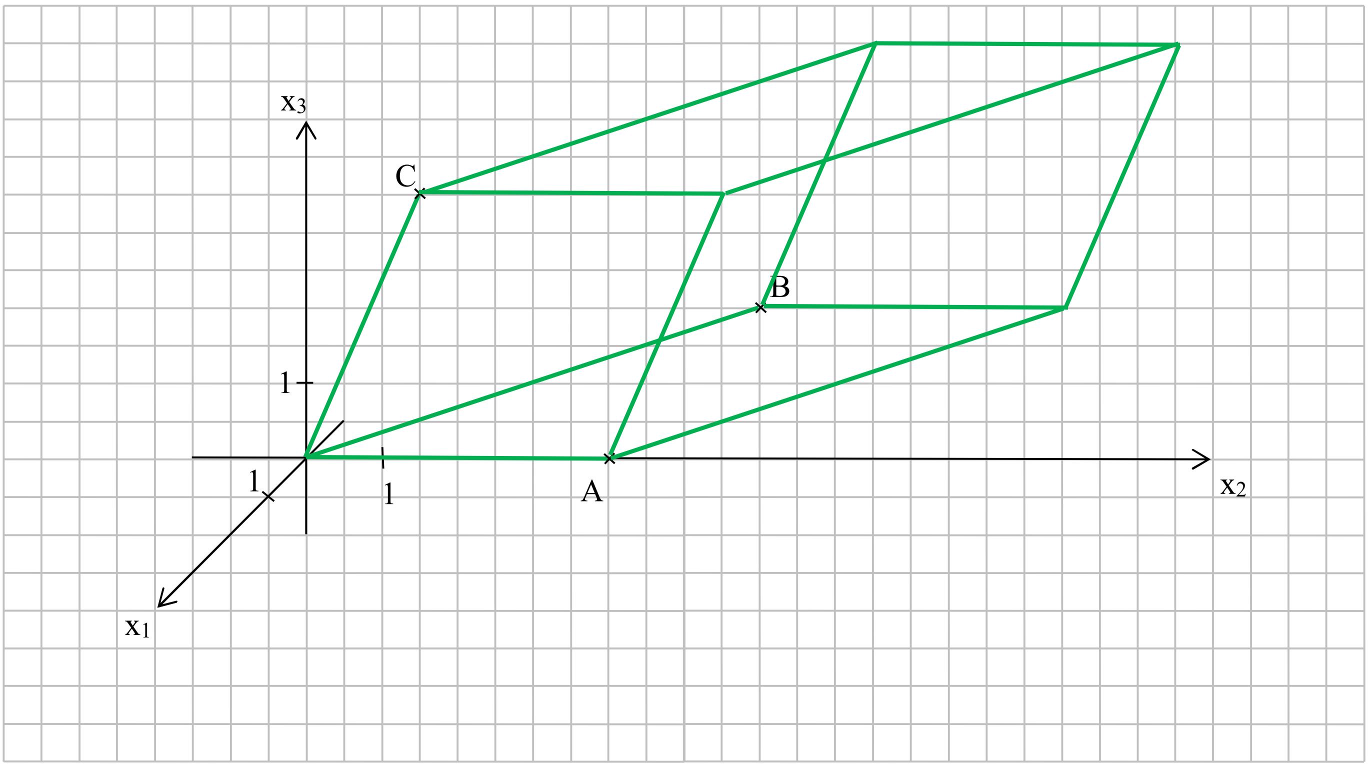
161/2

a) V = 0 (also eigentlich gar kein Spat! deshalb ist auch keine Zeichnung sinnvoll)

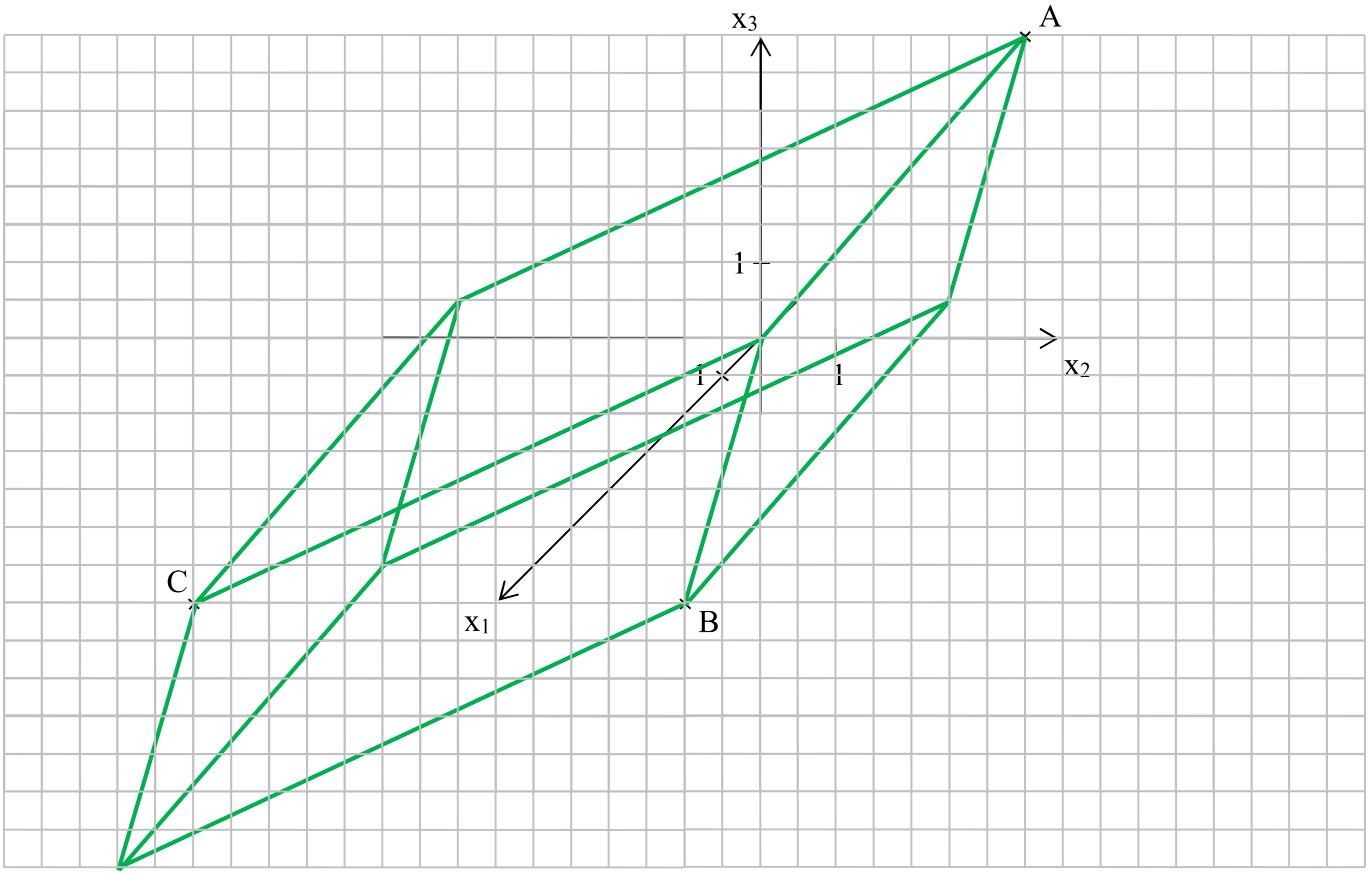
b) V = 56



c) V = 80



d) V = 159



<u>161/3</u> $a = -23$

<u>161/4</u> a) 45 b) $\frac{25}{3}$ c) 10 d) 4,5

<u>161/5</u>
a)

- $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ in Komponenten schreiben und Definition der Vektoraddition verwenden
- Definition des Skalarprodukts verwenden
- Klammern auflösen, zusammenfassen, Definition des Skalarprodukts verwenden
- wieder in Kurzschreibweise ausdrücken

Man sollte ein paar mehr Zwischenschritte machen und evtl. jeweils dazu schreiben, was man da gerade macht bzw. verwendet.

b) $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \circ \vec{c} = \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$

$= (a_2b_3 - a_3b_2) \cdot c_1 + (a_3b_1 - a_1b_3) \cdot c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1) \cdot c_3$
$= a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 + a_1b_2c_3 - a_2b_1c_3$
andererseits ist

$-\left(\vec{c} \times \vec{b}\right) \circ \vec{a} = -\left(\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} c_2b_3 - c_3b_2 \\ c_3b_1 - c_1b_3 \\ c_1b_2 - c_2b_1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

$= -(c_2b_3 - c_3b_2) \cdot a_1 - (c_3b_1 - c_1b_3) \cdot a_2 - (c_1b_2 - c_2b_1) \cdot a_3$
$= -c_2b_3a_1 + c_3b_2a_1 - c_3b_1a_2 + c_1b_3a_2 - c_1b_2a_3 + c_2b_1a_3$
Man hat also genau dieselben Summanden, nur in unterschiedlicher Reihenfolge.

c) Außer V = $\left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \circ \vec{c}\right|$ gibt es noch fünf andere Möglichkeiten:

1. $\left|\left(\vec{b} \times \vec{a}\right) \circ \vec{c}\right| = \left|-\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \circ \vec{c}\right| = \left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \circ \vec{c}\right|$ (Antikommutativität des Vektorprodukts verwenden; das Minus kann man weglassen, weil es im Betrag steht.)
2. $\left|\left(\vec{b} \times \vec{c}\right) \circ \vec{a}\right| = \left|-\left(\vec{c} \times \vec{b}\right) \circ \vec{a}\right| = \left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \circ \vec{c}\right|$ (Antikommutativät des Vektorprodukts verwenden, dann Teil (b))
3. $\left|\left(\vec{c} \times \vec{b}\right) \circ \vec{a}\right| = \left|-\left(\vec{c} \times \vec{b}\right) \circ \vec{a}\right| = \left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \circ \vec{c}\right|$ (Man kann ein Minus einfügen, weil es im Betrag steht; dann Teil (b) verwenden.)
4. $\left|(\vec{c} \times \vec{a}) \circ \vec{b}\right| = \cdots = \left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \circ \vec{c}\right|$ (Zeigt man prinzipiell genauso wie (b).)
5. $\left|(\vec{a} \times \vec{c}) \circ \vec{b}\right| = \left|-(\vec{c} \times \vec{a}) \circ \vec{b}\right| = \left|(\vec{c} \times \vec{a}) \circ \vec{b}\right| = \left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \circ \vec{c}\right|$ (Antikommutativität des Vektorprodukts verwenden; das Minus kann man weglassen, weil es im Betrag steht; dann 4. verwenden.)

<u>162/6</u> a) $V_{\text{Pyramidenstumpf}} = \frac{35}{12}$; $V_{\text{Ergänzungspyramide}} = \frac{5}{12}$

b) Das Volumen der Ergänzungspyramide ist ein Achtel des Volumens der kompletten Pyramide; letzteres berechnet man wie üblich mithilfe des Spatprodukts. Das Volumen des Pyramidenstumpfs ist dann die Differenz des Volumens der kompletten Pyramide und des Volumens der Ergänzungspyramide. Wem das mit dem Achtel nicht klar ist (folgt mit zentrischer Streckung!), der kann auch erst mal die Mittelpunkte der Strecken $\overline{AS}, \overline{BS}, \overline{CS}$ berechnen und mit diesen drei Punkten und S dann wie üblich das Pyramidenvolumen mittels des Spatprodukts, dann noch das Volumen der kompletten Pyramide ABCS mittels des Spatprodukts, und das Volumen des Pyramidenstumpfes erhält man wieder als Differenz.

c) linker Körper: Volumen eines Würfels mit dem Spatprodukt berechnen, mal 5 nehmen

rechter Körper: Volumen des Quaders (?) mit dem Spatprodukt berechnen; Volumen des fehlenden dreiseitigen Prismas mit dem Spatprodukt berechnen (Hälfte eines Spats!), Differenz bilden

<u>162/7</u> Für die Koordinaten der Spitze muss gelten: $|5s_1 - 9s_2 - 2s_3 + 27| = 240$.

z. B.: S(42,6|0|0); $S\left(0\middle|-23\tfrac{2}{3}\middle|0\right)$; S(0|0|–106,5); S(–53,4|0|0); $S\left(0\middle|29\tfrac{2}{3}\middle|0\right)$; S(0|0|133,5)

<u>162/8</u> siehe Buch S. 160

<u>162/9</u> a) unabhängig b) abhängig c) unabhängig d) abhängig

<u>162/10</u> keine sind komplanar

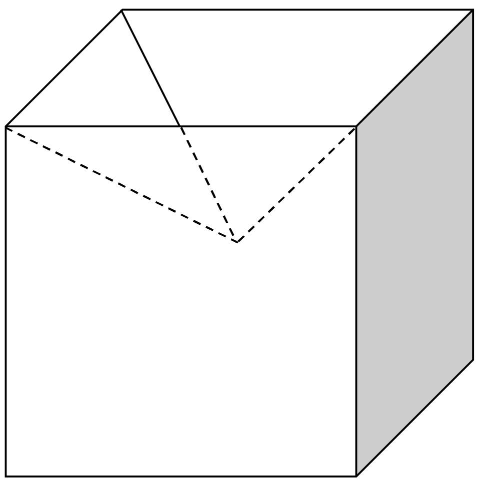
<u>162/11</u> Für die Koordinaten von $\vec{c}$ muss gelten: $12c_1 - 19c_2 - 2c_3 = 0$.

z. B.: $\vec{c} = \begin{pmatrix} 19 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -13 \end{pmatrix}$

<u>162/12</u> $a = 0$ oder $a = -0{,}5$

<u>162/13</u>

a)



b) In die Oberseite des Würfels wird mittig ein Würfel eingeschnitten, dessen Seitenkanten parallel zum ursprünglichen Würfel sind und die Länge 2 dm haben.

c) Modell 1: $10\frac{2}{3}$ dm³ Wasser, $53\frac{1}{3}$ dm³ Beton;   Modell 2: 8 dm³ Wasser, 56 dm³ Beton

altes Buch (winklers-Verlag):

52/2 $a_1 = 4$ oder $a_1 = 7$ 52/7 $s = \pm 2$

Buch 11. Klasse: 240/5   V = 45; h = 11,25