III.1 Grenzverhalten

103/1 (T) bzw. 99/1 (NT)
a) Nullstelle: $x_1 = 2$; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^-$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
b) Nullstellen: $x_1 = 0$; $x_2 = 2$; $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -1^+$
c) (T) bzw. (d) (NT) Nullstelle: $x_{1,2} = 0$; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^+$
c) (NT) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^+$
d) Nullstelle: $x_1 = \ln 4 \approx 1{,}39$; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^+$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

113/1 (T) bzw. 105/1 (NT)
a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^+$
b) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 5^-$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
c) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^-$
d) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2^+$
e) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0^-$
f) (T) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1^-$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
f) (NT) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 7^+$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 7^-$

III.2 Ableitungen

82/2 (T) bzw. 78/2 (NT) (zweiter Teil) b) $g'(x) = 1 + 2x\, e^{x^2}$

82/3 (T) bzw. 78/3 (NT) b) $f'(x) = (x+1)\, e^x$

86/4 (T) bzw. 82/4 (NT)
a) Differenz (von Produkten); $x_1 = 3$
$f'(x) = (2x-4)e^x$; $x_1 = 2$
$f''(x) = (2x-2)e^x$; $x_1 = 1$
b) Produkt; $x_{1,2} = 0$
$f'(x) = (x^2+2x)e^x$; $x_1 = 0$, $x_2 = -2$
$f''(x) = (x^2+4x+2)e^x$; $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2}$
c) Produkt; $x_1 = 0$
$f'(x) = 6x^2 + 3$; $-$
$f''(x) = 12x$; $x_1 = 0$
d) Produkt; $-$
$f'(x) = (2x^2+4x+1)e^x$; $x_{1,2} = -1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$
$f''(x) = (2x^2+8x+5)e^x$; $x_{1,2} = -2 \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$

86/5 (T) bzw. 82/5 (NT)
$\left(-x^2 \cdot (0{,}5x+3)\right)' = -1{,}5x^2 - 6x$
$(-x^2 \cdot 2e^x)' = (-2x^2 - 4x)\, e^x$
$\left((0{,}5x+3) \cdot 2e^x\right)' = (x+7)\, e^x$

86/6 (T) bzw. 82/2 (NT) keine allgemeine Lösung angebbar; machen Sie mal!

93/5 (T) bzw. 89/5 (NT)
a) $f'(x) = (3x^2 + 2x)\, e^{3x}$
$f''(x) = (9x^2 + 12x + 2)\, e^{3x}$
$f'''(x) = (27x^2 + 54x + 18)\, e^{3x}$
b) $f'(x) = (0{,}5x^2 + 2x - 1)\, e^{0{,}5x}$
$f''(x) = (0{,}25x^2 + 2x + 1{,}5)\, e^{0{,}5x}$
$f'''(x) = (0{,}125x^2 + 1{,}5x + 2{,}75)\, e^{0{,}5x}$
c) $f'(x) = 1 + 5\,(2x - 1)\, e^{1-2x}$
$f''(x) = -20\,(x - 1)\, e^{1-2x}$
$f'''(x) = 20\,(2x - 3)\, e^{1-2x}$
d) $f'(x) = (-x + 3)\, e^{-x}$
$f''(x) = (x - 4)\, e^{-x}$
$f'''(x) = (-x + 5)\, e^{-x}$

93/6 (T) bzw. 89/6 (NT)
f) $f'(x) = -2x\, e^{3-x^2}$
g) $f'(x) = (-4x^2 - 6x - 2)\, e^{x^2+1}$
h) $f'(x) = (-0{,}25x^2 + 3{,}5x - 8{,}25)\, e^{-0{,}25x}$
i) $f'(x) = (-x^2 + 1{,}5x - 0{,}5)\, e^{x^2-3x+6}$
j) $f'(x) = (x^2 - 2)\, e^{x}$

93/7 (T) bzw. 89/7 (NT) keine allgemeine Lösung angebbar; machen Sie mal!

94/1 (T) bzw. 90/1 (NT)
c) $f'(x) = (x + 1)\, e^{x}$
d) $f'(x) = (x - 1)\, e^{x}$
e) $f'(x) = (-x + 3)\, e^{-x}$
f) $f'(x) = (3x^3 + 2x + 1)\, e^{x^3+2x}$

94/2 (T) bzw. 90/2 (NT)
a) $f'(x) = (1{,}5x - 0{,}5)\, e^{0{,}5x}$
$f''(x) = (0{,}75x + 1{,}25)\, e^{0{,}5x}$
$f'''(x) = (0{,}375x + 1{,}375)\, e^{0{,}5x}$
b) $f'(x) = (-2x^2 + 8x - 3)\, e^{-2x}$
$f''(x) = (4x^2 - 20x + 14)\, e^{-2x}$
$f'''(x) = (-8x^2 + 48x - 48)\, e^{-2x}$
c) $f'(x) = (4x^2 - 4x + 2)\, e^{x^2-2x}$
$f''(x) = (8x^3 - 16x^2 + 20x - 8)\, e^{x^2-2x}$
$f'''(x) = (16x^4 - 48x^3 + 96x^2 - 88x + 36)\, e^{x^2-2x}$
d) $f'(x) = (-x^3 + 3x^2)\, e^{-x}$
$f''(x) = (x^3 - 6x^2 + 6x)\, e^{-x}$
$f'''(x) = (-x^3 + 9x^2 - 18x + 6)\, e^{-x}$
e) $f'(x) = (0{,}375x - 2)\, e^{-0{,}25x+3}$
$f''(x) = (-0{,}09375x + 0{,}875)\, e^{-0{,}25x+3}$
$f'''(x) = (0{,}0234375x - 0{,}3125)\, e^{-0{,}25x+3}$
f) $f'(x) = (4x^3 - 4x^2 - 10x + 2)\, e^{-0{,}5x^2+x}$
$f''(x) = (-4x^4 + 8x^3 + 18x^2 - 20x - 8)\, e^{-0{,}5x^2+x}$
$f'''(x) = (4x^5 - 12x^4 - 26x^3 + 62x^2 + 24x - 28)\, e^{-0{,}5x^2+x}$

94/8 (T) bzw. 90/8 (NT) a) $S_y(0|-4)$; $N(2|0)$ b) $m = -2$ bzw. $m = 2e^2$

94/10 (T) bzw. 90/10 (NT) $f(0) = g(0) = 4$ und $f'(0) = g'(0) = -0{,}4$

III.3 Kurvendiskussion

86/1 (T) bzw. 82/1 (NT)

a) $x_1 = -3, x_2 = 0{,}5$; $f'(x) = (2x^2 + 9x + 2)\, e^x$, $f''(x) = (2x^2 + 13x + 11)\, e^x$

b) $x_{1,2} = 0, x_3 = \frac{5}{6}$; $f'(x) = \left(-\frac{3}{5}x^3 - \frac{13}{10}x^2 + x\right) e^x$, $f''(x) = \left(-\frac{3}{5}x^3 - \frac{31}{10}x^2 - \frac{8}{5}x + 1\right) e^x$

c) $x_1 = 1{,}5, x_2 = -2$; $f'(x) = (x^2 + 2{,}5x - 2{,}5)\, e^x$, $f''(x) = (x^2 + 4{,}5x)\, e^x$

86/2 (T) bzw. 82/2 (NT)   z. B., es gibt natürlich noch unendlich viele andere Möglichkeiten!

a) $f(x) = (x^2 + 1)\, e^x$ b) $f(x) = (x - 3)\,(x + 2)\, e^x$ c) $f(x) = (x + 7)^2\, e^x$

86/3 (T) bzw. 82/3 (NT)   a) f   b) f   c) w   d) f   e) w   f) w   g) w

94/3

$S_y(0|0) = N_1$; $N_2(4|0)$

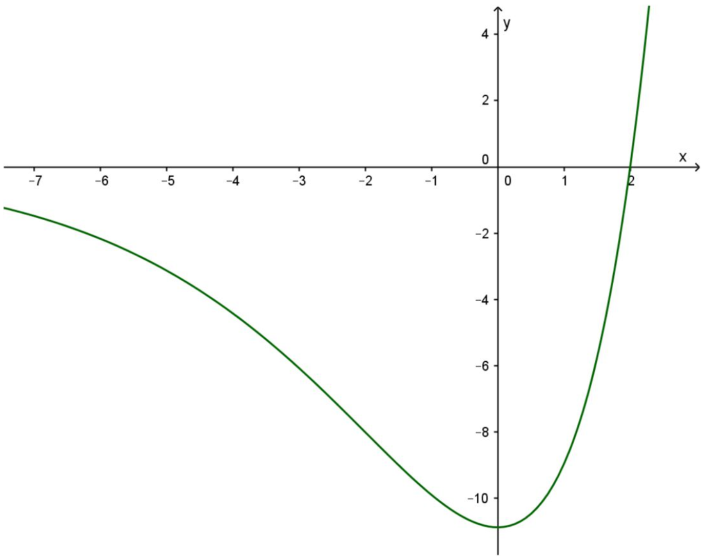
$f'(x) = (x^2 - 6x + 4)\, e^{-x+1}$ ==> Ex.st.: $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{5}$

$f''(x) = (-x^2 + 8x - 10)\, e^{-x+1}$ ==> We.st.: $x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{6}$

103/1 (T) bzw. 99/1 (NT)

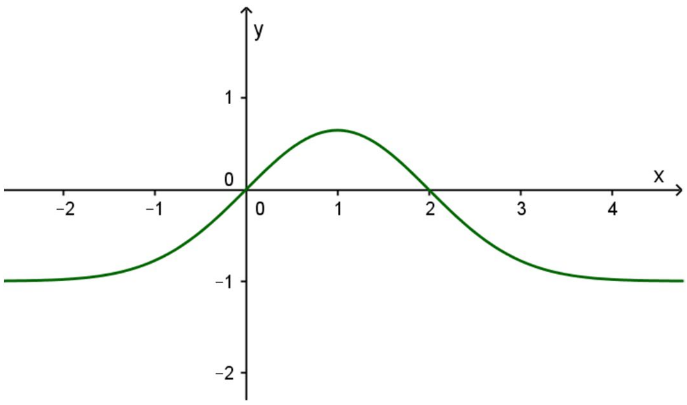
a) Nullst.: $x_1 = 2$;   Min.st.: $x_1 = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0^-$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$



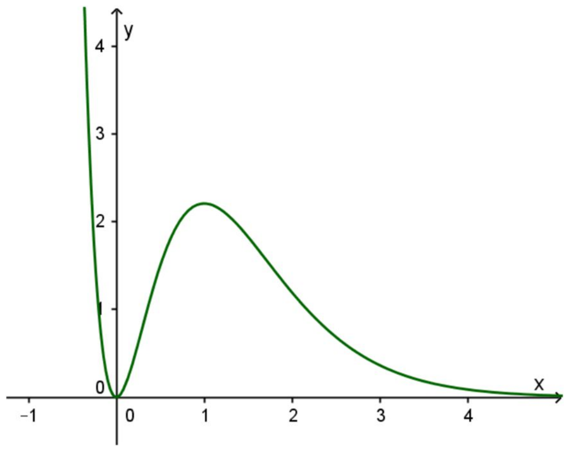
b) Nullst.: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$;   Max.st.: $x_1 = 1$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = -1^+$



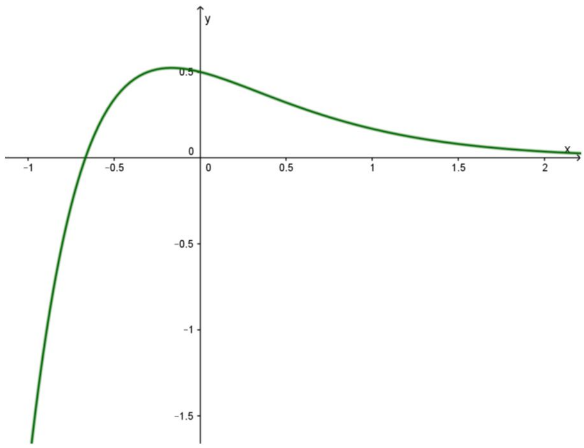
c) (T) bzw. d) (NT)   Nullst.: $x_{1,2} = 0$;   Min.st.: $x_1 = 0$,   Max.st.: $x_2 = 1$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0^+$



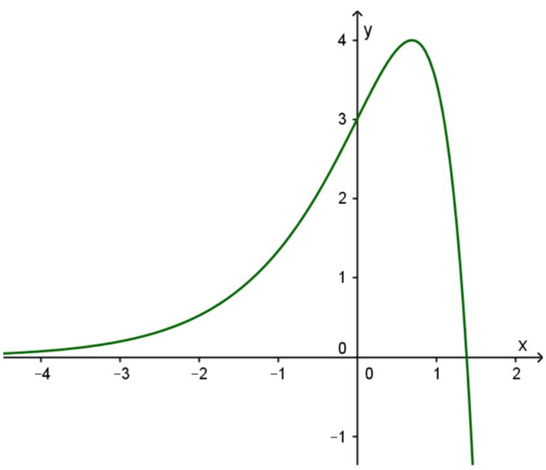
c) (NT) Nullst.: $x_1 = -\frac{2}{3}$; Max.st.: $x_1 = -\frac{1}{6}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0^+$



d) Nullst.: $x_1 = \ln(4)$; Max.st.: $x_1 = \ln(2)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0^+$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$



<u>103/2</u> (T) bzw. <u>99/2</u> (NT)

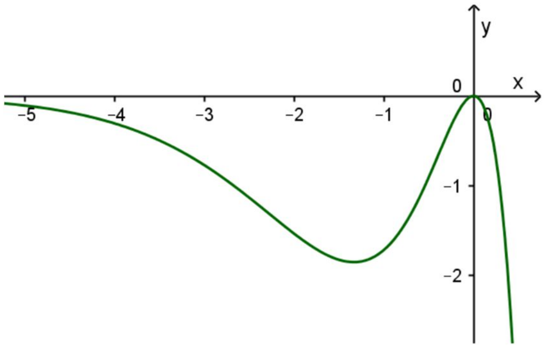
a1 (offensichtlich; Grundwissen!)
b6 (wegen f(0), Globalverhalten, Symmetrie)
c3 (wegen Nullst., Globalverhalten)
d5 (wegen Nullst., Globalverhalten)
e4 (offensichtlich; Grundwissen!)
f2 (wegen f(0), Globalverhalten)

<u>112/5</u> (T) bzw. <u>104/5</u> (NT)

a) $x_{1,2} = 0$; HoP$(0|0)$, TiP$\left(-\frac{4}{3}\middle|-\frac{32}{3}e^{-7/4} \approx -1{,}85\right)$

WeP$_1$ $(\approx -2{,}28| \approx -1{,}31)$, WeP$_1$ $(\approx -0{,}39| \approx -0{,}65)$

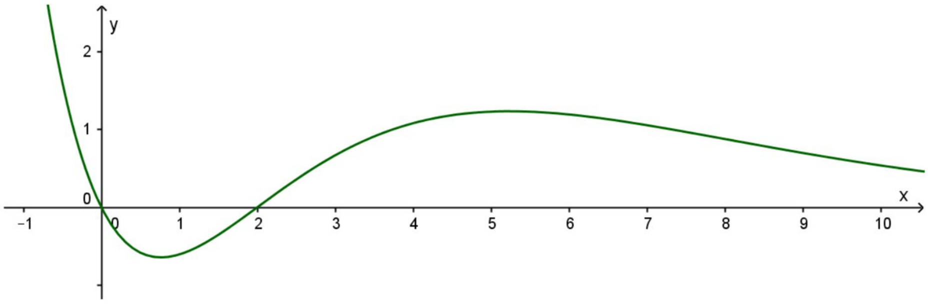
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0^-$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$



b) $x_1 = 0$, $x_2 = 2$; TiP$\left(3-\sqrt{5}\approx 0{,}76\middle|\approx -0{,}64\right)$, HoP$\left(3+\sqrt{5}\approx 5{,}24\middle|\approx 1{,}24\right)$

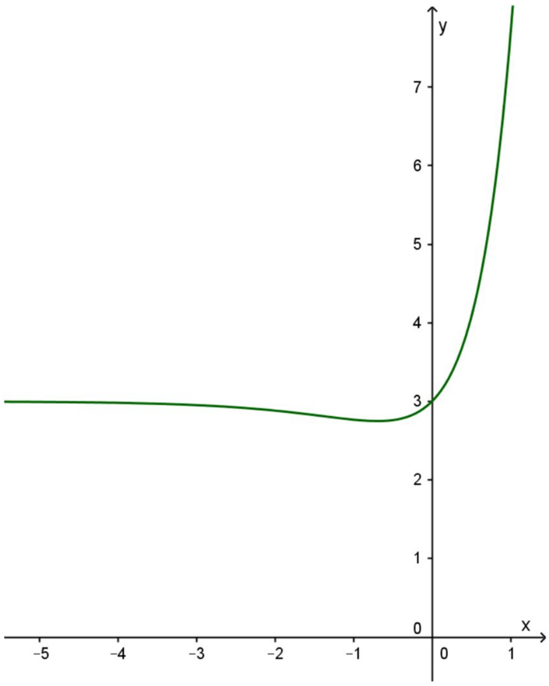
WeP$_1$ $(2|0)$, WeP$_1$ $\left(8\middle|\frac{48}{e^4}\approx 0{,}88\right)$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^+$



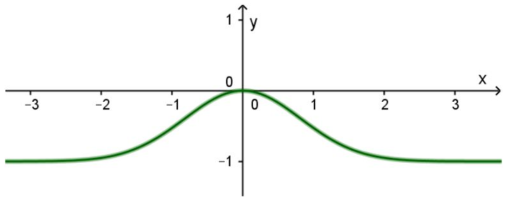
c) (T) keine Nst.; TiP$(-\ln(2)\approx -0{,}69|2{,}75)$; WeP$\left(-\ln(4)\approx -1{,}39\middle|\frac{45}{16}\approx 2{,}81\right)$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 3^-$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$



c) (NT) $x_1 = 0$; HoP$(0|0)$; WeP$_{1,2}\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{3}\approx \pm 0{,}82\middle|e^{-0.5}-1\approx -0{,}39\right)$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = -1^+$



113/2 (T) bzw. 105/2 (NT) a) 6 b) 2 c) 4 d) 3 e) 5 f) 1

III.4 Anwendungen

112/1 (T) bzw. 104/1 (NT)

a) A(30) = 25 ==> $35\,e^{-k\cdot 30}+20=25$ ==> ..... $k=\frac{\ln(7)}{30}\approx 0{,}065$

b) A(0) = 55; B(0) = 20; $\lim\limits_{t\to\infty} A(t)=\lim\limits_{t\to\infty} B(t)=20$

c) $t_1=\frac{\ln\left(\frac{14}{3}\right)}{k}\approx 24$ (min)

d) B_{max} = B(10) ≈ 56; A_{max} = A(0) = 55 (da A eine sma Funktion ist) ==> B war heißer

e) t_2 = 20 (min)

112/2 (T) bzw. 104/2 (NT)

a) $0\le t <\approx 7{,}78$

b) t_1 = 3

c) $t_2=\sqrt{10}+3\approx 6$; -1800 (€/Monat)

d) $\lim\limits_{t\to\infty} G(t)=-3^+$; $t_3\approx 7{,}78$ (siehe (a)!)

112/3 (T) bzw. 104/3 (NT)

a) t_1 = 2,5 (Wochen); t_2 = 12,5 (Wochen)

b) $\lim\limits_{t\to\infty} A(t)=7{,}5^+$

c) $A(5)\approx 15$, d. h. in Woche 5 werden etwa 15 ME verkauft

$\dot{A}(5)\approx 0{,}15$, d. h. in Woche 5 gehen die Verkäufe um etwa 0,15 ME pro Woche zurück

112/4 (T)

a) A(0) = 10 ==> k = 0,05

A(39) = 35 ==> ... $m=\frac{\ln\left(\frac{20}{71{,}05}\right)}{39}\approx -0{,}0325$

b) A: maximal nach etwa 63,1 (Jahren), nämlich etwa 40,0 (Mrd. Tonnen)

B: maximal nach etwa 55,0 (Jahren), nämlich etwa 35,5 (Mrd. Tonnen)

c) $A(94)-B(94)\approx 6{,}42$; A ist um etwa 22,0% größer

Die prozentuale Abweichung ist hier nicht zwingend auch maximal. (Bsp.: Zu irgendeinem Zeitpunkt könnte A = 10 und B = 5 sein; dann wäre die absolute Abweichung 5, also kleiner als hier, die prozentuale Abweichung aber 100%, also größer als hier.)

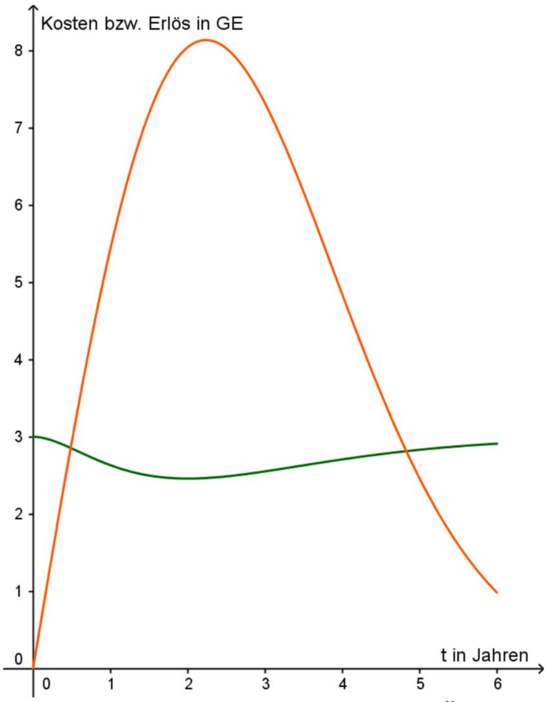
d) $\dot{A}(100)\approx -0{,}236$; $A(100)\approx 34{,}2$; $\dot{B}(100)\approx -0{,}222$; $B(100)\approx 27{,}8$

Im Szenario A ist der CO_2-Ausstoß nach 100 Jahren also (deutlich) größer als im Szenario B, nimmt aber auch (etwas) schneller ab. Die prozentuale Abweichung ist hier etwa 22,9%, also tatsächlich größer als nach 94 Jahren (dem Zeitpunkt, als die absolute Abweichung am größten war).

104/4 (NT)

a) $k(0)=3$; $e(0)=0$; $k(6)=3-36\,e^{-6}\approx 2{,}91$; $e(6)=36\,e^{-3{,}6}\approx 0{,}98$

b) grün: K; orange: E



„ökonomische Situation interpretieren": ? Ich bin Physiker, kein Ökonom!

c) $t_{min} = 2$ (Jahre); $t_{max} = \sqrt{5} \approx 2{,}23$ (Jahre)

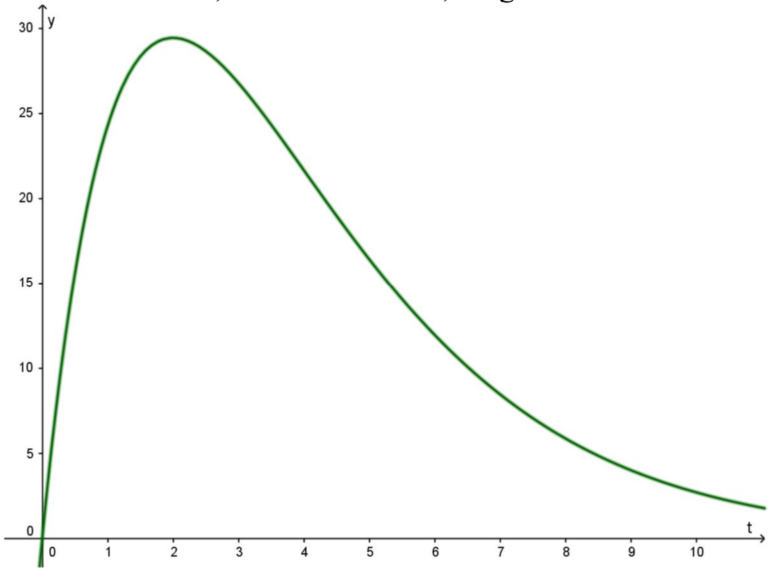
d) Kosten: fallen am stärksten für t = $2 - \sqrt{2} \approx 0{,}59$, steigen am stärksten für t = $2 + \sqrt{2} \approx 3{,}41$

Erlös: steigt am stärksten für t = 0, fällt am stärksten für t = $\sqrt{15} \approx 3{,}87$

e) abgeschätzt aus den Graphen: Gewinn für etwa $0{,}5 < t < 4{,}8$, maximaler Gewinn für etwa t = 2,2

<u>113/3</u> (T) bzw. <u>105/3</u> (NT)

a) größte Konzentration nach 2 Stunden, nämlich etwa 29,4 mg/ℓ



b) $t_1 = 4$ (Stunden) c) $\approx -5{,}41$ (mg/ℓ pro Stunde)

d) $T(t) = -\frac{40}{e^2}\,t + \frac{320}{e^2}$ ==> $t_2 = 8$ (Stunden) e) $a = 5e \approx 13{,}6$; $b = 0{,}25$

<u>113/4</u> (T) bzw. <u>105/4</u> (NT)

W(t) beschreibt wohl den Verlauf des Wasserbestands *mit* geöffneten Schleusen!

a) W(0) = 5,25; W(5) ≈ 4,40

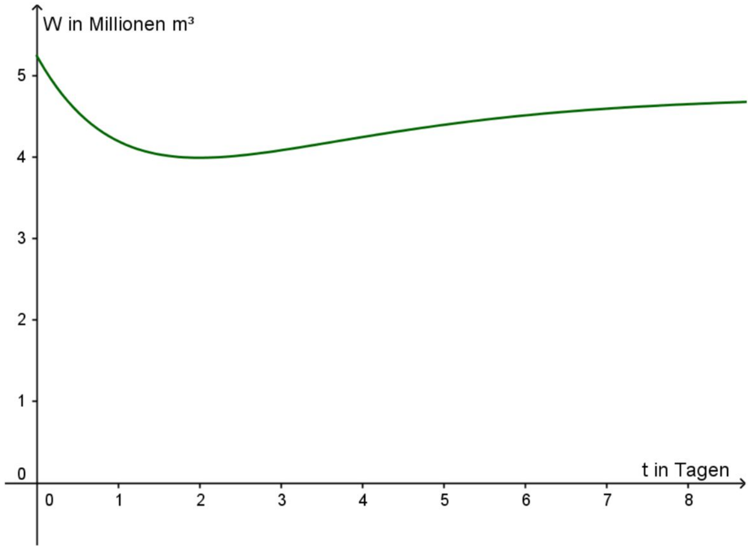
b) $t_1 = 2$ (Tage); Wasserbestand ist etwa 14,2% höher als nötig

c) Aufgabenstellung unklar!

Gemeint ist entweder die Wasserdurchflussrate (Wasserstromstärke) in dem Moment, in dem die Schleusen geöffnet werden, also $\dot{W}(0) = -1{,}8$ (Millionen m^3 pro Tag) , oder die gesamte Wassermenge, die durchfließt, während die Schleusen offen sind, also $W(0) - W(2) \approx 1{,}25$ (Millionen m^3).

d) $\lim\limits_{t \to \infty} W(t) = 4{,}75^{-}$, d. h. auf lange Sicht befinden sich 4,75 Millionen m^3 Wasser im Stausee

e)



<u>113/5</u> (T) bzw. <u>105/5</u> (NT)

a) G(0) = 90; G_{ideal} = 70   b) $t_1 \approx 6{,}93$ (Monate)   c) $t_1 = 5$ (Monate)

<u>114/6</u> (T) bzw. <u>106/6</u> (NT)

a: Grenzwert wird deutlich überschritten (etwa 32,7 mg/m^3)

b: Grenzwert wird nicht überschritten (etwa 6 mg/m^3)

a: höchste Zunahme nach 0 min; Konzentration 0 mg/m^3
höchste Abnahme nach etwa 30,4 min; Konzentration etwa 24 mg/m^3

b: höchste Zunahme nach etwa 1,05 min; Konzentration etwa 2,15 mg/m^3
höchste Abnahme nach etwa 6,10 min; Konzentration etwa 4,32 mg/m^3

$a(6) \approx 23{,}4;\quad a(8) \approx 27{,}5;\quad a(10) \approx 30{,}1;\quad a(12) \approx 31{,}7$

$b(6) \approx 4{,}42;\quad b(8) \approx 2{,}56;\quad b(10) \approx 1{,}31;\quad b(12) \approx 0{,}61$

==> Die Änderung war eindeutig sehr sinnvoll.

<u>114/7</u> (T) bzw. <u>106/7</u> (NT)

a) etwa 0,83 Wochen später

b) nach etwa 5,76 Wochen; etwa 1,3 pro Tag

c) HoP(8|15), d.h. nach 8 Wochen gibt es die meisten Neuerkrankungen pro Woche, nämlich 15

d) t_2 = 16 (Wochen)   (folgt praktisch ohne Rechnung aus Symmetrie der quadratischen Fkt.!)

<u>114/8</u> (T) bzw. <u>106/8</u> (NT)

a) N(0,5) = 1745 ==> ... $N_0 = 1745 \cdot e^{-1{,}25} \approx 500$

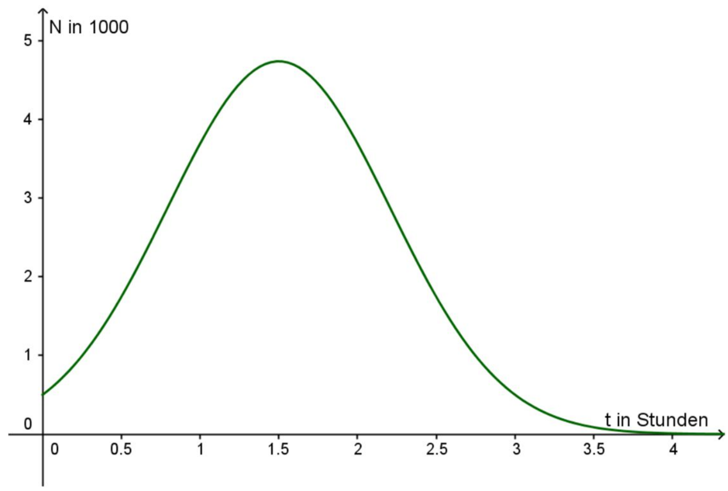
b) (T) t_{max} = 1,5 (h); $N_{max} \approx 4744$ (NT: zu (a)!)

c) (T) bzw. b) (NT) $t_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{2}}{2} \approx \begin{cases} 0{,}71 \\ 2{,}21 \end{cases}$ (h)

Der Graph hat dort die größte Steigung bzw. das größte Gefälle; an diesen Stellen befinden sich WeP.

d) (T) bzw. c) (NT) $t_3 \approx 13{,}2$ (h)

e) (T) bzw. d) (NT)



114/9 (T) bzw. 106/9 (NT)

a) $\dot{B}(t) = 2{,}25\ (t - 7)\ e^{-0{,}15t}$ ist = 0 für t = 7 und hat dort einen VZW von – nach + ; $B(7) \approx 35{,}0$

b) B(0) = 75 (Millionen Fische); $\lim\limits_{t \to \infty} B(t) = 70^{-}$, d. h. auf lange Sicht befinden sich 75 Millionen Fische im Südostatlantik

c) $B(16{,}5) \approx 49{,}6$ (Millionen Fische)

$\dot{B}(16{,}5) \approx 1{,}80$ (Millionen Fische pro Jahr)

d) $\ddot{B}(t) = 2{,}25(-0{,}15t + 2{,}05)\ e^{-0{,}15t}$ ist = 0 für t = $\frac{41}{3}$ und hat dort einen VZW von + nach –

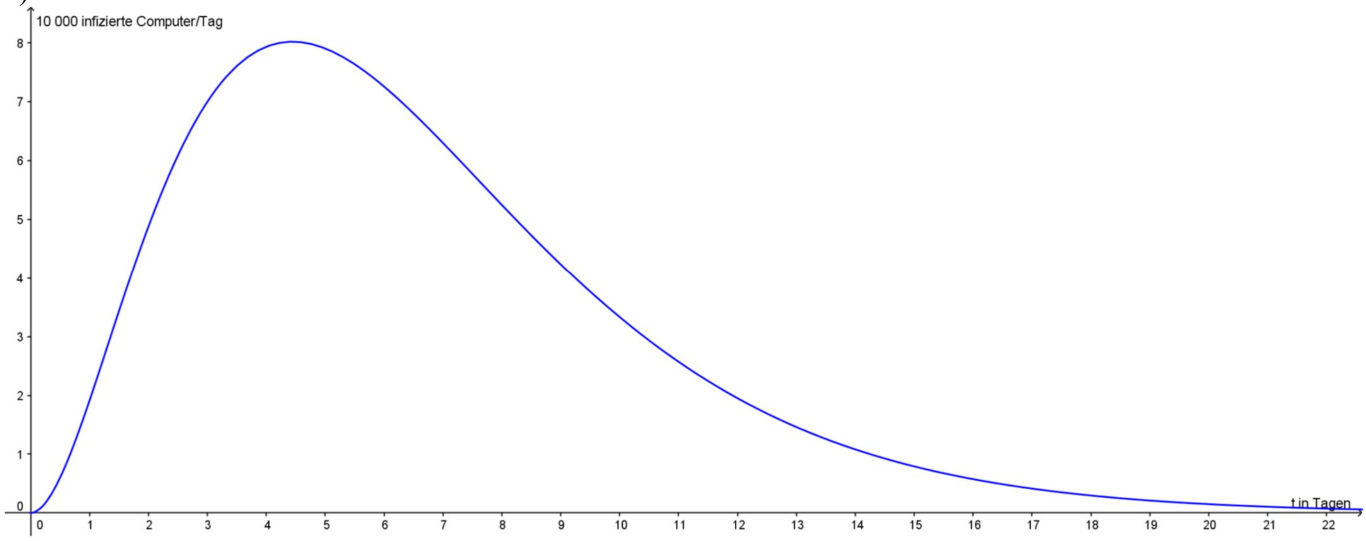
==> größte Bestandszunahme im Jahr 2008

133/15 (nur T)

a) $\dot{I}(0) = 0$; $\lim\limits_{t\to\infty} \dot{I}(t) = 0$, d. h. am Anfang und auf lange Sicht gibt es keine Neuinfektionen

b) $\dot{I}$ ist smz in $\left[0;\ \frac{40}{9}\right]$, sma in $\left[\frac{40}{9};\ \infty\right[$; $\dot{I}_{max} = 30\,000 \cdot \left(\frac{40}{9e}\right)^2 \approx 80\,200$

c)



d) gemeint ist sicher $[I(t)]_4^8$

$A \approx \frac{\dot{I}(4)+\dot{I}(8)}{2} \cdot 4 \approx 264\,000$ = Anzahl der Computer, die zwischen dem 4. und dem 8. Tag neu infiziert wurden

e) wie üblich: I(t) ableiten......

f) $I(8) - I(4) \approx 282\,000$, also etwa 7% mehr als abgeschätzt

150/14 (T) bzw. 138/13 (NT)

a) G_f: rot; G_g: blau (z. B. mittels Steigung bei 0, oder x_{max})

b) bei F(x) darf im Exponenten nur –x stehen (oder im Vorfaktor kein e), bei G(x) muss –0,5 stehen!

F'(x) = ... = f(x), G'(x) = ... = g(x) (mit Produkt- und Kettenregel)

c) B ist beliebter