II.1 Exponentialfunktionen

a) Wiederholung: Potenzgesetze

Blatt:

1) a) $\sqrt[4]{8}$ b) $\sqrt[3]{25}$ c) $\sqrt[3]{1296}$ d) $\sqrt{100000}$ e) $\sqrt{3}$ f) $\frac{1}{\sqrt[5]{4}}$ g) $\frac{1}{\sqrt{10}}$ h) $\frac{1}{\sqrt[4]{8}}$ i) $\sqrt{2}$
j) $\sqrt[5]{4}$ k) $\sqrt[10]{27}$ l) $\sqrt[4]{125}$ m) $\sqrt{16807}$ n) $\frac{1}{\sqrt[5]{16}}$ o) $\frac{1}{\sqrt[5]{729}}$ p) $\frac{1}{\sqrt[5]{279936}}$

2) a) $5^{1/2}$ b) $6^{1/3}$ c) $2^{1/4}$ d) $24^{2/3}$ e) $11^{6/5}$ f) $7^{3/4}$ g) 5^3 h) $18^{2/3}$ i) $2^{-1/2}$ j) $4^{-1/3}$ k) $12^{-3/4}$ l) $7^{-2/3}$

3) a) $\sqrt{10}$ b) $\sqrt{5}$ c) 81 d) 2 e) $\sqrt[5]{625}$ f) $\sqrt{2}$ g) $\sqrt[3]{9}$ h) $\sqrt[5]{4}$

4) a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt[3]{5}$ i) $\frac{1}{\sqrt[5]{16}}$ j) $\frac{1}{9}$ k) $\frac{1}{49}$ l) $\frac{1}{9}$ m) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

5) a) $5^{3/4}$ b) $3^{7/12}$ c) $2^{1/2}$ d) $4^{1/12}$ e) $2^{3/10}$ f) $3^{1/10}$ g) $10^{1/6}$ h) $6^{-7/6}$ i) $2^{-1/6}$

6) a) $6^{1/4}$ b) $8^{2/5}$ c) $2^{-1/2}$ d) $\left(\frac{2}{5}\right)^{1/3}$ e) $2^{2/5}$ f) $5^{0,4}$

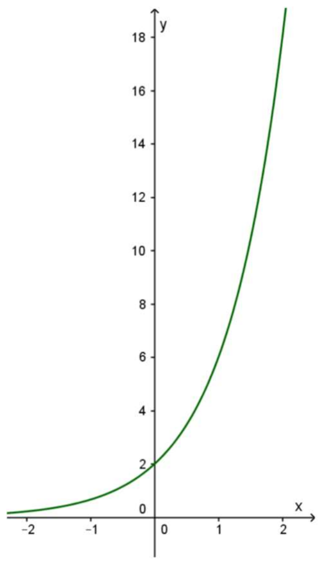
7) a) 4 b) 9 c) $5^{1/6}$ d) $2^{-3/10}$ e) $3^{3/5}$

b) Begriff und Eigenschaften

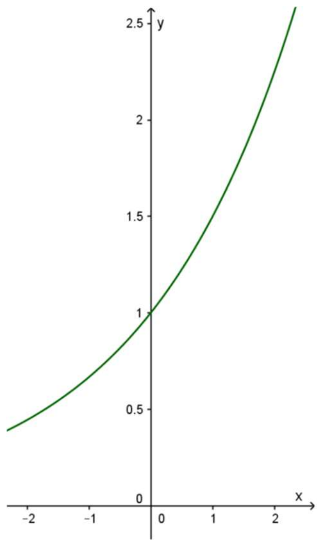
57/2 (T) bzw. 53/2 (NT)

x	–2	–1	0	1	2
$f_a(x)$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{3}$	2	6	18
$f_b(x)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{3}$	1	1,5	2,25
$f_c(x)$	8	4	2	1	0,5
$f_d(x)$	$\frac{1}{90}$	$\frac{1}{30}$	0,1	0,3	0,9

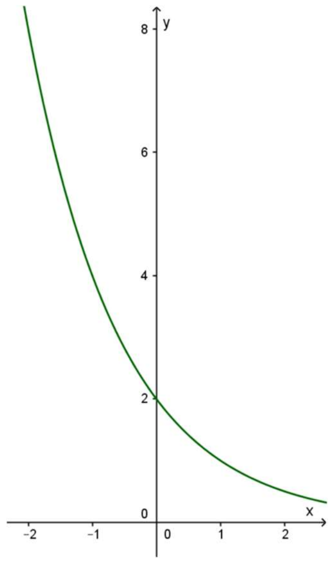
a) 2; 3



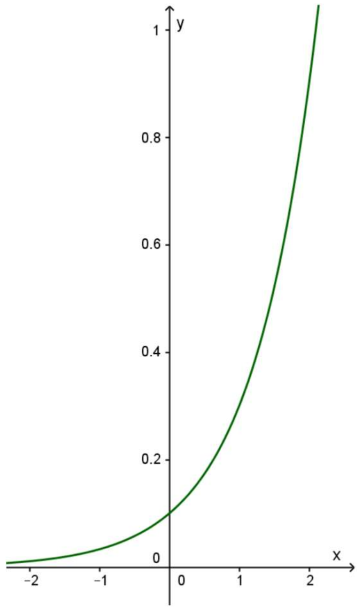
b) 1; 1,5



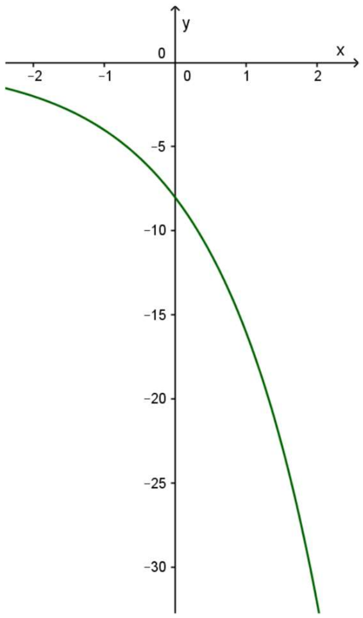
c) 2; 0,5

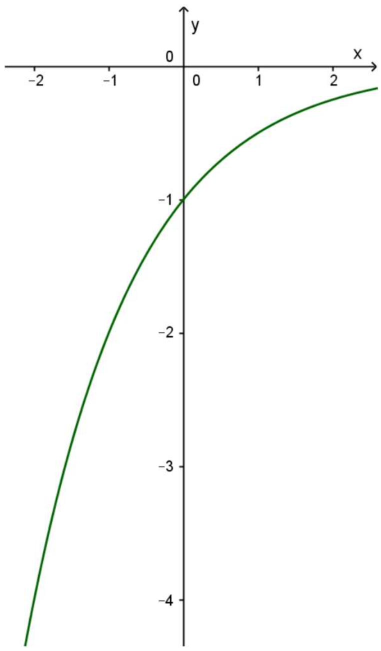


d) 0,1; 3



57/6 (T) bzw. 53/6 (NT)





64/3 (T) bzw. 60/3 (NT)

a) $1^x = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also weder Wachstum noch Zerfall, sondern einfach konstant

b) n.d. bedeutet hier „nicht definiert" (Taschenrechner zeigt „Math Error" oder ähnliches)

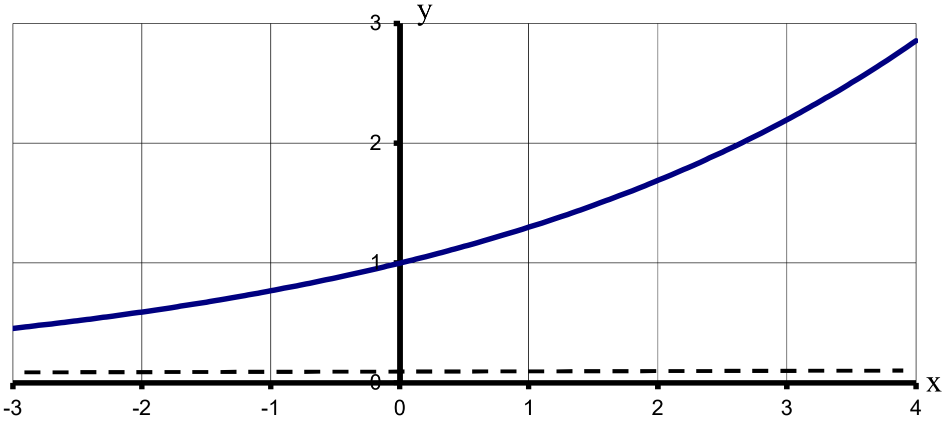
x	–2	–1,5	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5	2
$(-1)^x$	1	n.d.	–1	n.d.	1	n.d.	–1	n.d.	1

c) $(-1)^{0,5} = \sqrt{-1}$, also offensichtlich (in $\mathbb{R}$) nicht definiert

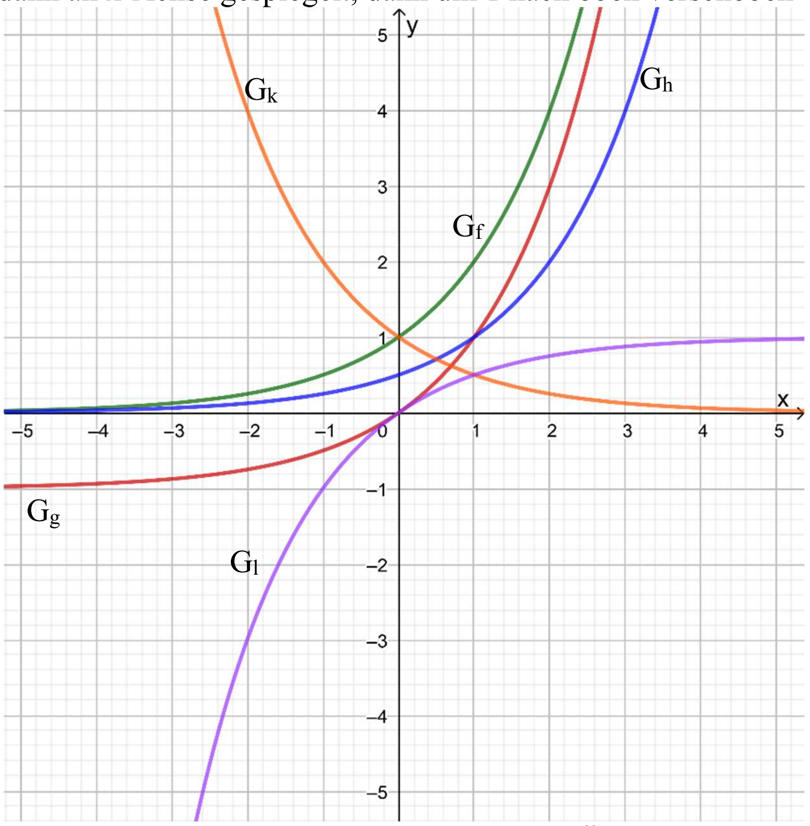
(Hier werden aber keine Potenz*gesetze* zum Umformen verwendet, sondern einfach die Definition einer rationalen Potenz.)

8) $f(x+1) = a^{x+1} = a^x \cdot a^1 = a \cdot a^x = a \cdot f(x)$

x	0	1	2	3	4	–1	–2	–3
$1,3^x$	1	1,3	1,69	2,197	2,8561	≈0,769	≈0,592	≈0,455



9) a) s.u. b) G_g: um 1 nach unten verschoben; G_h: um 1 nach rechts verschoben; G_k: an y-Achse gespiegelt; G_l: an y-, dann an x-Achse gespiegelt, dann um 1 nach oben verschoben



10) a) $f(x) = \sqrt{3}^x$ b) x > 12 bzw. x < –4 c) $g(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x$

11) a) $f(x) = a^2 \cdot a^x$ b) $f(x) = \frac{1}{a} \cdot a^x$ c) $f(x) = a \cdot a^{-x}$ d) $f(x) = 3a^2 \cdot a^{-x}$

c) Anwendungen

57/1 (T) bzw. 53/1 (NT)
a) exponentieller Zerfall (Wert nimmt jedes Jahr um denselben Faktor ab)
b) exponentieller Zerfall (Temperatur nähert sich an die Umgebungstemperatur an; allerdings hier streng genommen eine allgemeinere Exponentialfunktion!)
c) kein exponentieller Zerfall (Kerzenhöhe nimmt in derselben Zeit immer um denselben Wert ab, nicht um denselben Faktor ==> lineare Abhängigkeit)
d) exponentielles Wachstum (Bakterienanzahl nimmt in selber Zeit jeweils um denselben Faktor zu – zumindest solange es genügend Ressourcen gibt... allgemein eher logistisches Wachstum)
e) exponentielles Wachstum (die Anzahl der informierten Personen wächst jedes Mal um denselben Faktor 3)

f) kein exponentieller Zerfall (Alkoholpegel nimmt in derselben Zeit jeweils um denselben Wert ab, nicht um denselben Faktor ==> lineare Abhängigkeit)

57/3 (T) bzw. 53/3 (NT)
a) $f(t) = 200\,000 \cdot 1{,}05^t$ (t in Jahren, $f(t)$ in m^3) b) $f(-5) \approx 156\,705$ = Bestand vor 5 Jahren

57/4 (T) bzw. 53/4 (NT)
a) $m(t) = 5 \cdot 0{,}969^t$ (t in Stunden, $m(t)$ in kg) b) Masse, nicht Gewicht! $m(6) \approx 4{,}139$

57/5 (T) bzw. 53/5 (NT) $h(n) = 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$; $D_h = \mathbb{N}$; $h(4) \approx 0{,}633$ (h in m)

57/7 (T) bzw. 53/7 (NT)
a) Stand 11.7.2018: 7,64 Mrd. Menschen
b) ≈ 6,02 Mrd.
c) ≈ 22,6 Jahre
d) vor etwa 1850 Jahren
e) Es ist sicher kein besonders gutes Modell: der Wachstumsfaktor war früher deutlich kleiner (höhere (Kinder-)Sterblichkeit!) und wird wohl auch wieder kleiner werden (in Industrieländern sinkt die Kinderanzahl pro Paar). Logistisches Wachstum passt sicher deutlich besser.

57/8 (T) bzw. 53/8 (NT)
a) b ≈ 0,9828 (einheitenlos! Einheit 1/min ergibt da keinen Sinn! gemeint ist: Wachstumsfaktor, wenn t in Minuten gemessen wird)
b) ≈ 1,72% c) ≈ 84,09% d) ≈ 1,6 mg e) ≈ 67 min

57/9 (T) bzw. 53/9 (NT)
a) K_0: Anfangskapital; p: Zinssatz; n: Anzahl der Verzinsungen
Pro Verzinsung nimmt das Kapitel jeweils um den Faktor $1 + \frac{p}{100}$ zu, nach n Verzinsungen hat das Anfangskapitel K_0 also um den Faktor $\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$ zugenommen.
b) 1615,93 €

57/10 (T) bzw. 53/10 (NT) a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ Jahr

64/1 (T) bzw. 60/1 (NT)
a) 3125; 15 625; 390 625; ≈ 21 837 000; ≈ 365 075 000
b) 25; ≈ 11; 5
c) Die Annahme, dass der Wachstumsfaktor immer gleich bleibt, ist sehr unrealistisch. (Passender wäre logistisches Wachstum.)

64/6 (T) bzw. 60/6 (NT) rot

64/8 (T) bzw. 60/8 (NT)
a) 1; 2; 4; 8; 16; 32; 64; 128
b) 2^{n-1}
c) $2^{64} - 1 \approx 1{,}84 \cdot 10^{19}$ (bei etwa 40 mg pro Korn: etwa $7{,}4 \cdot 10^{11}$ t !)

Blatt:
1) a) $\frac{1}{64}$ m^2 = 156,25 cm^2 b) 2^{-n} m^2 2) 4,617 Milliarden

3) a) 17 181,86 DM b) 15938,48 DM bzw. 18509,30 DM c) 15600 DM 4) 3,71 DM; 4,30 DM

5) vor 12 Jahren: etwa 42 000 fm ➔ etwa 18 000 fm, also etwa 10 000 Bäume

6) 2,70 Milliarden 7) 6,6% 8) a) 81,1%; 49,8%; 24,8%; 6,2% b) 29,2%
9) 16971; 2531; 712 10) a) 87,1 mg; 75,8 mg; 66,0 mg; 25 mg b) $y = 100 \text{ mg} \cdot 0{,}5^{x/8 \text{ Tage}}$

11) pro Jahr: 0,984; 0,978; 0,977; 0,923

d) allgemeinere Exponentialfunktionen

63/6 (T) bzw. 59/6 (NT)
Streckung ($|a| > 1$) bzw. Stauchung ($|a| < 1$) um a in y-Richtung, für $a < 0$ Spiegelung an x-Achse
Streckung ($|c| < 1$) bzw. Stauchung ($|c| > 1$) um $1/c$ in x-Richtung, für $c < 0$ Spiegelung an y-Achse
Verschiebung in x-Richtung um d
Verschiebung in y-Richtung um y_0

II.2 Logarithmen

a) Grundlagen
Blatt:
1) a) $\log_2 32 = 5$ b) $\log_3 81 = 4$ c) $\log_{10} 10000 = 4$ d) $\log_5 5 = 1$ e) $\log_7 1 = 0$ f) $\log_2 \frac{1}{2} = -1$
g) $\log_3 \frac{1}{9} = -2$ h) $\log_{10} 0{,}001 = -3$ i) $\log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2}$ j) $\log_6 \sqrt[3]{6} = \frac{1}{3}$ k) $\log_4 \sqrt[3]{16} = \frac{2}{3}$
l) $\log_5 \frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{2}$ m) $\log_{10} \frac{1}{\sqrt[4]{1000}} = -\frac{3}{4}$ n) $\log_a \sqrt[5]{a^3} = \frac{3}{5}$ o) $\log_a \sqrt[q]{a^p} = \frac{p}{q}$

2) a) 2 b) 4 c) 6 d) 3 e) 3 f) 2 g) 4 h) 1 i) 1 j) 1 k) 0 l) 0 m) 0 n) 0 o) 1 p) –1 q) –1 r) –1 s) –2 t) –2 u) –4 v) –3 w) –4 x) –3 y) –1
3) $\log_2 8 = 3$; $\log_8 2 = \frac{1}{3}$ (also: vertauscht man Basis und Numerus, so ergibt sich der Kehrwert!)
4) a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{3}{2}$ f) $-\frac{1}{2}$ g) $-\frac{1}{2}$ h) $-\frac{1}{2}$ i) $-\frac{1}{2}$ j) $-\frac{1}{3}$ k) –1 l) –2 m) –3
n) –1 o) –1

5) a) $2^4 = 16$ b) $2^x = 3$ c) $3^y = 5$ d) $10^z = 7$ e) $10^r = 27$ f) $10^s = 50$ g) $10^u = v$ h) $a^b = c$

6) a) $2^x = 10$ b) $3^y = 17$ c) $10^x = 3{,}2$ d) $10^r = 0{,}4$ e) $5^x = 7$ f) $4^b = 10$ g) $10^a = 0{,}4$ h) $10^x = 0{,}01$

7) a) $x = \log_2 25$ b) $x = \log_3 12$ c) $x = \log_4 3$ d) $x = \lg 23$ e) $y = \lg 17$ f) $r = \lg 68$
g) $x = \lg 0{,}45$ h) $a = \lg 7$

9) b) 3; 7; 0,5; 1; 9; 12; 5

b) Rechengesetze
10) a) 0 b) $-\lg x$ c) $-\lg u$ d) $1 - \lg a$ e) $2 - \lg x$

11) a) a) $\lg 3 + \lg x$ b) $\lg a + \lg b + \lg c$ c) $\lg 5 + \lg a - \lg x$ d) $\log_2 u + \log_2 v - \log_2 w$
b) a) $2 \lg u$ b) $3 \lg x$ c) $0{,}5 \lg x$ d) $-0{,}5 \log_3 x$

12) a) $\lg u$ b) $5 \lg x$ c) $-\lg a$ d) 0 e) $-\lg 2$ f) 0 g) $0{,}5 \lg x$ h) 2 i) $\lg 2$ j) $2 \lg x$
13) a) 3 b) 5 c) x d) $\frac{1}{7}$ e) $\frac{1}{8}$ f) x
c) Gleichungen lösen

75/1 (T) bzw. 71/1 (NT) a) ≈ 17,67 (Jahre) b) ≈ 13 511,30 €

75/4 (T) bzw. 71/4 (NT)
a) $\frac{341}{500} = 0{,}682$; $\frac{233}{341} \approx 0{,}683$; $\frac{159}{233} \approx 0{,}628$ im Rahmen der Messgenauigkeit...

b) $f(t) = 500 \cdot 0{,}466^t$ (t in min, $f(t)$ in mg) c) ≈ 6,03 min; ≈ 0,91 min

75/5 (T) bzw. 71/5 (NT) 4800 Jahre

75/7 (T) bzw. 71/7 (NT) ≈ 5250 Jahre

76/6 (T) bzw. 72/6 (NT)
Ahmeds Aussage ist falsch; nach 20 Jahren wäre die Wirtschaftsleistung um den Faktor $1{,}05^{20} \approx 2{,}65$ größer. (Richtig wäre die Aussage nur bei *linearem* Wachstum, d. h. jedes Jahr kommen 5% der Wirtschaftsleistung des Anfangsjahres hinzu – statt des jeweils vorhergehenden Jahres.) Richtig ist etwa 14,2 Jahre.

76/7 (T) bzw. 72/7 (NT) a) zwischen 41- und 42mal b) zwischen 47- und 48mal

Blatt:
8) a) lg 29≈1,46 b) lg 11≈1,04 c) lg 9≈0,95 d) lg 5≈0,70 e) lg 1 = 0 f) lg 0,4≈–0,40
g) – h) – i) lg 2≈0,30 j) lg 0,6≈–0,22 k) lg 0,5≈–0,30 l) – m) –lg 0,8≈0,10
n) –lg 2,5≈–0,40 o) $-\frac{1}{2}\lg\frac{3}{4} \approx 0{,}06$ p) –2 lg 0,4≈0,80
9) a) $10^{1,3617}$; $10^{1,1523}$; $10^{1,8021}$; $10^{0,9201}$; $10^{-2,3979}$

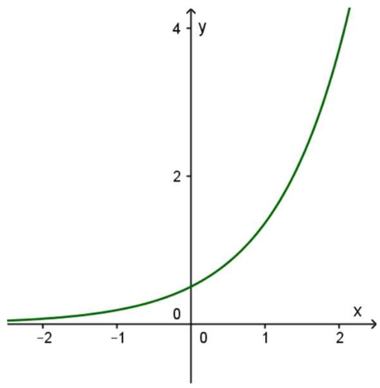
14) a) 1,7925 b) 1,5546 c) –2,7221 d) –0,8038 e) 0,6151 f) –0,1965 g) –0,7553
h) –0,0977 i) –0,3247 j) –2,3648 k) –0,4767 l) 3,7700

15) a) 1,7782 b) 0,2851 c) –0,3802 d) –3,0196 e) 1

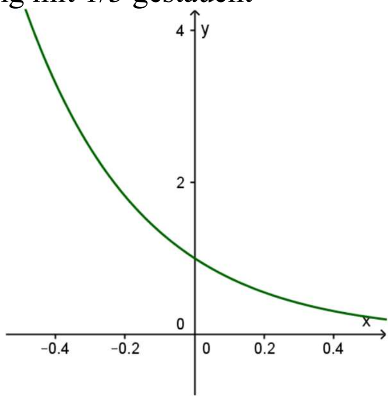
16) a) 0; 1 b) 2; 3 c) $\frac{1}{2}$; 1 d) $\log_3 2 \approx 0{,}6309$; k. w. Lsg. e) 0; –1 f) $\log_7 3 \approx 0{,}5646$; k. w. Lsg.

II.3 Die Eulersche Zahl

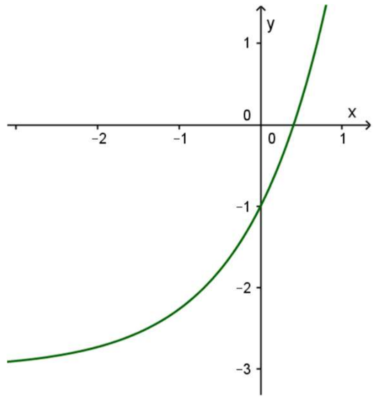
63/1 (T) bzw. 59/1 (NT)
a) in y-Richtung um 0,5 gestaucht



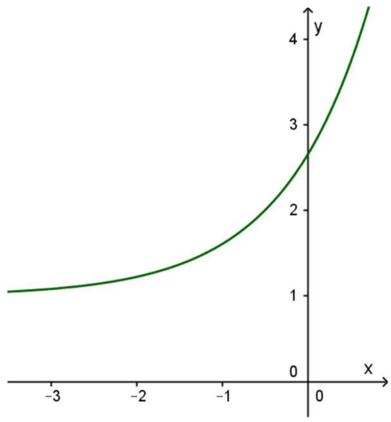
b) an y-Achse gespiegelt, in x-Richtung mit 1/3 gestaucht



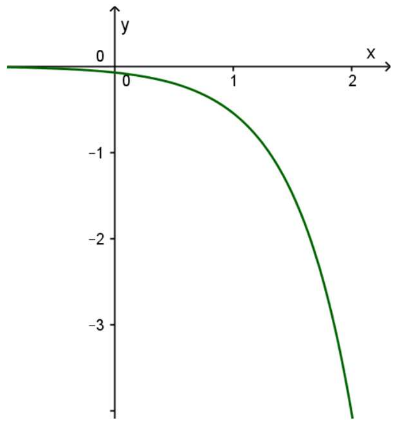
c) in y-Richtung um 2 gestreckt, um 3 nach unten verschoben



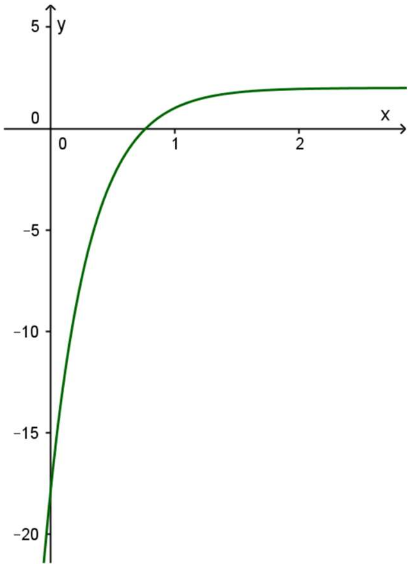
d) um 0,5 nach links und um 1 nach oben verschoben



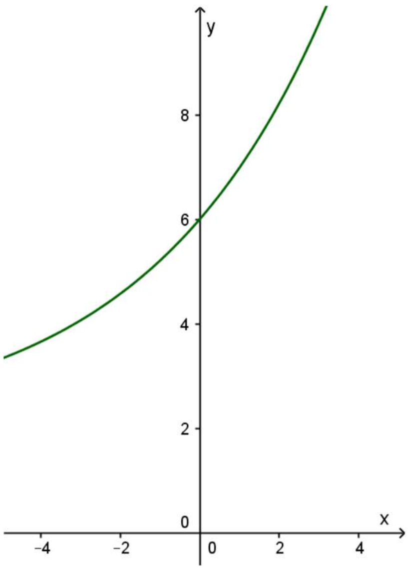
e) um 2 nach rechts verschoben, um 0,5 in x-Richtung gestreckt, an x-Achse gespiegelt, um 4 in y-Richtung gestreckt



f) um 1 nach rechts verschoben, an y-Achse gespiegelt, um 1/3 in x-Richtung gestaucht, an x-Achse gespiegelt, um 2 nach oben verschoben



<u>63/2</u> (T) bzw. <u>59/2</u> (NT)
a) $S_y(0|6)$
b) y = 2; Graph nähert sich für $x \to -\infty$ daran an
c) Wachstum



<u>63/3</u> (T) bzw. <u>59/3</u> (NT) Begründungen mittels Spiegelung, Verschiebung, Streckung/Stauchung
a) 4 b) 1 c) 3 d) 2

<u>63/4</u> (T) bzw. <u>59/4</u> (NT)

	a	d	y_0
a)	–1	0	0
b)	1	0	–2
c)	0,5	0	0
d)	1	3	0
e)	–0,5	3	–2

63/5 (T) bzw. 59/5 (NT)

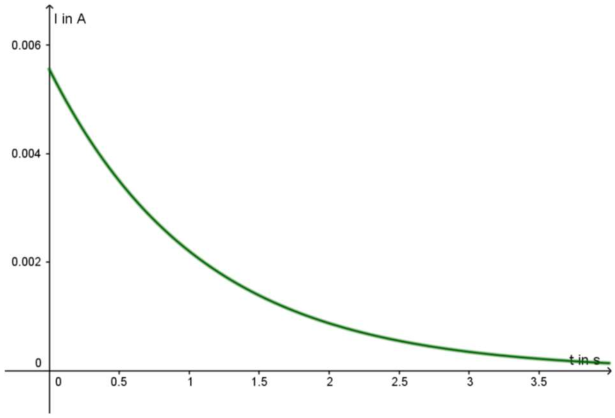
	a	y_0
G_f	1	1
G_g	–1	1
G_h	2	0
G_i	–2	2,5

63/7 (T)

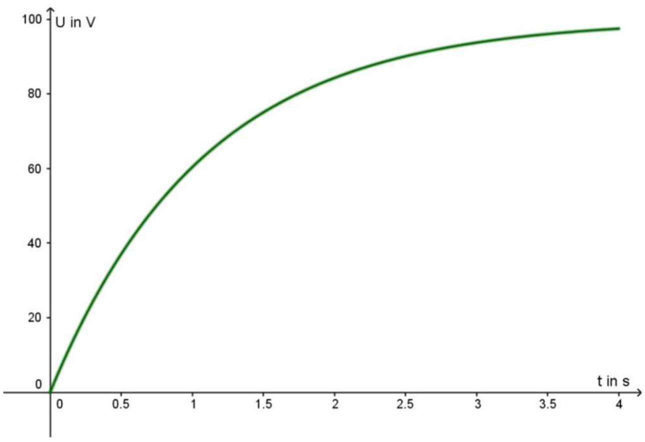
a) $I(t) = \frac{1}{180}\ \mathrm{A} \cdot e^{-\frac{t}{1{,}08\ s}}$

c) $U(t) = 100\ \mathrm{V} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{1{,}08\ s}}\right)$

b)



c)



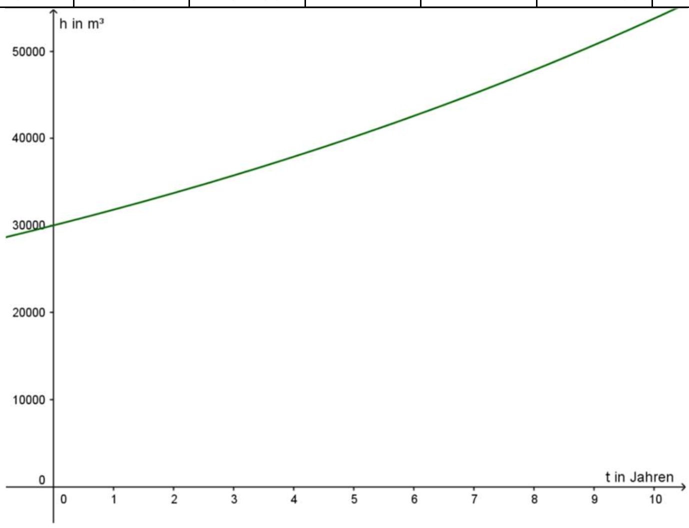
59/7 (NT)

a) Wachstum (Vorfaktor im Exponenten ist positiv)

b) $a = 30\,000$

c) Funktionswerte jeweils gerundet auf ganze Zahlen

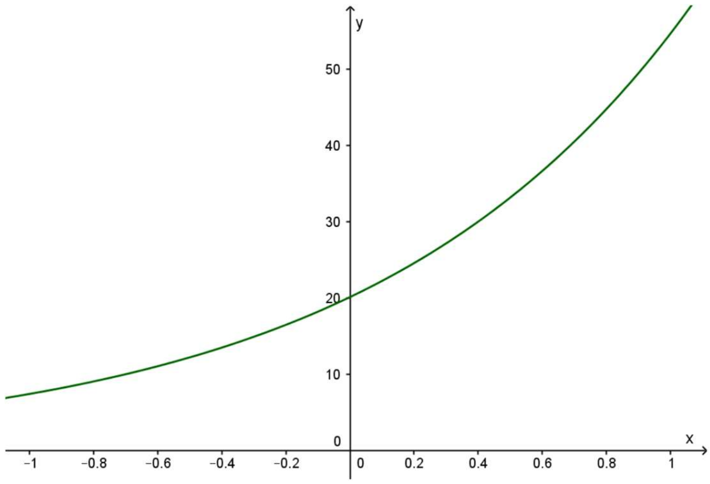
t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h(t)	30000	31801	33710	35734	37879	40153	42564	45119	47827	50699	53742



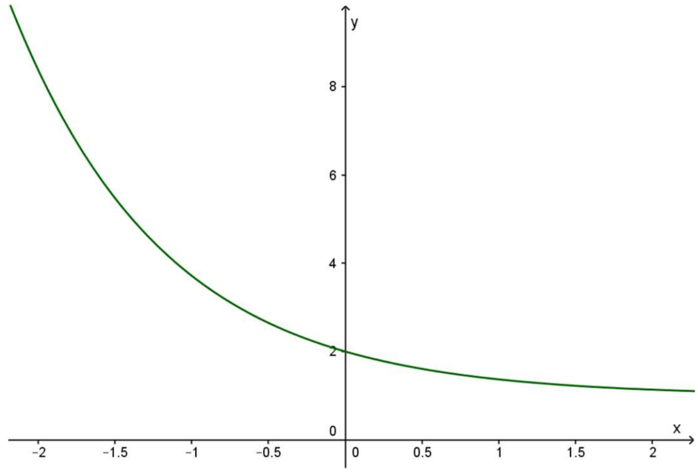
d) $h(-10) \approx 16\,747$ (m³) = Holzbestand vor 10 Jahren

64/2 (T) bzw. 60/2 (NT)

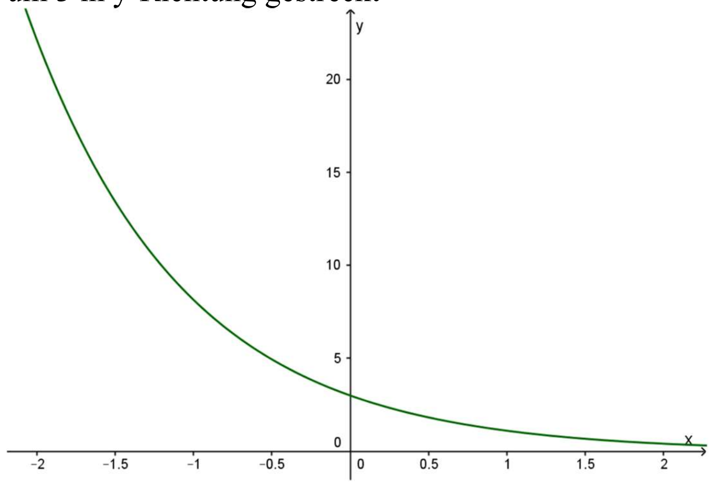
a) um 3 nach links verschoben



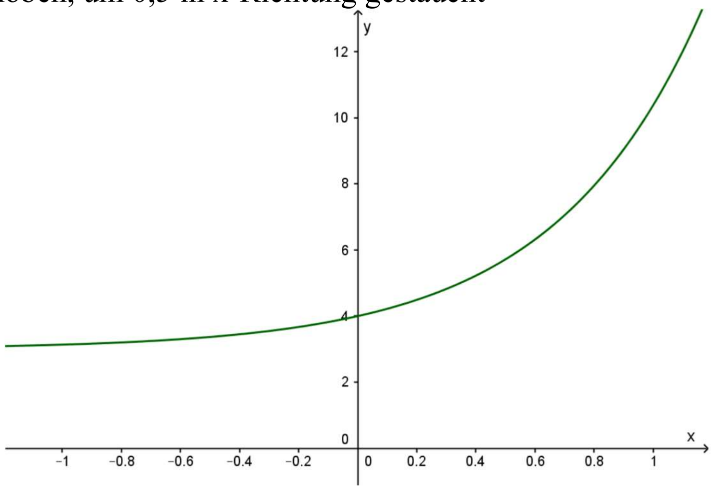
b) an y-Achse gespiegelt, um 1 nach oben verschoben



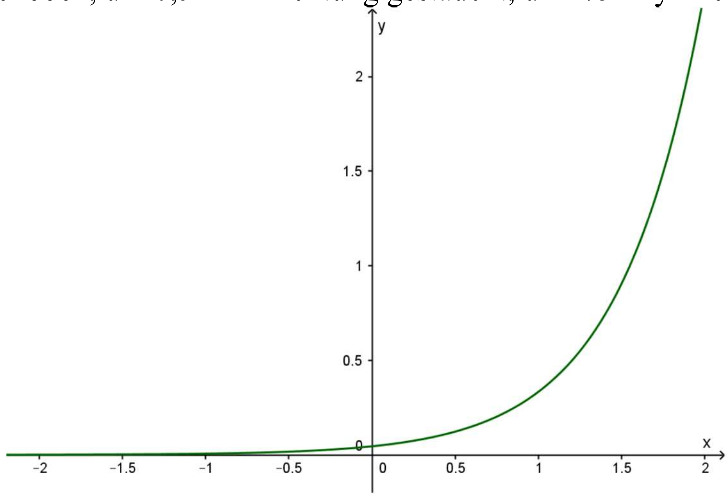
c) an y-Achse gespiegelt, um 3 in y-Richtung gestreckt



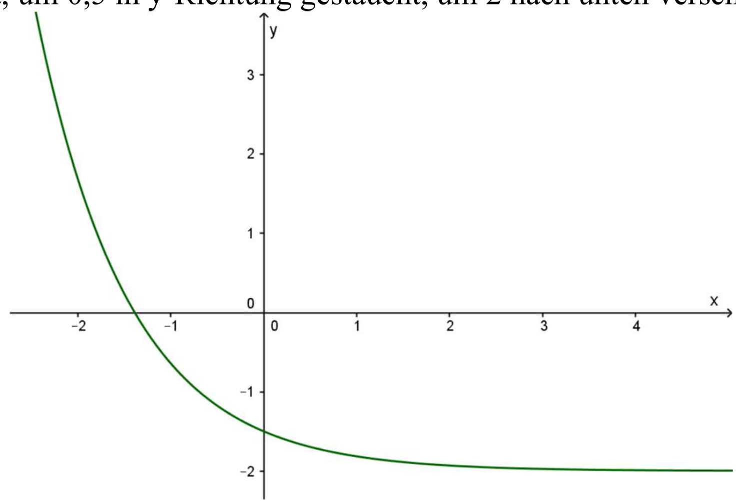
d) um 3 nach oben verschoben, um 0,5 in x-Richtung gestaucht



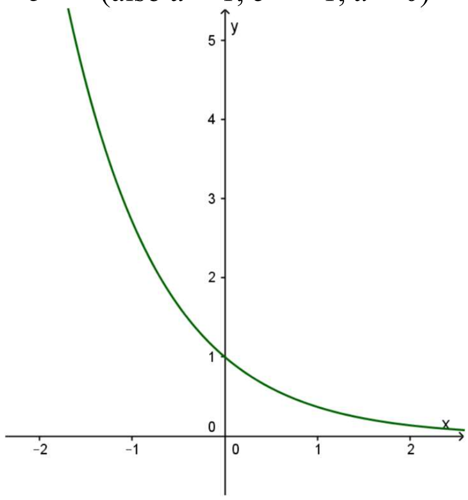
e) um 1 nach rechts verschoben, um 0,5 in x-Richtung gestaucht, um 1/3 in y-Richtung gestreckt



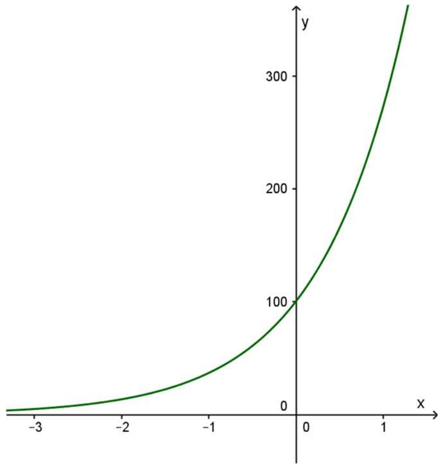
f) an y-Achse gespiegelt, um 0,5 in y-Richtung gestaucht, um 2 nach unten verschoben



64/4 (T) bzw. 60/4 (NT)
a) wahr; da hier nur die Rede von der natürlichen Exponentialfunktion ist, ist das einzige mögliche Beispiel der Graph zu $f(x) = e^x$ selbst; den sollte man kennen!
b) falsch: wird für $|a| > 1$ steiler, für $|a| < 1$ flacher, für $a < 0$ ändert sich das VZ der Steigung
c) wahr; Beispiel: Graph zu $f(x) = e^{-x}$ (also $a = 1$, $c = -1$, $d = 0$)



d) falsch: f hat die Nullstelle $x_1 = 0$ (Satz vom Nullprodukt beachten!)
e) wahr; da hier die Funktion schon vorgegeben ist, ergibt es keinen Sinn, sich einen „Beispiel"graphen auszudenken



64/5 (T) bzw. 60/5 (NT) keine allgemeine Lösung möglich; machen Sie mal!

64/7 (T) bzw. 60/7 (NT) Begründungen mittels Spiegelung, Verschiebung, Streckung/Stauchung
f(x): 4 g(x): 2 h(x): 1 k(x): 3

71/1 (T) bzw. 67/1 (NT) a) 4 b) 1 – ln(2) c) 1 – ln(4) d) 12 + 4 ln(2)

71/2 (T) bzw. 67/2 (NT)

$$e^{\ln(u)+l\ (v)} = e^{\ln(u)} \cdot e^{\ln(v)} = u \cdot v = e^{\ln(u \cdot v)}$$
$$e^{\ln(u)-\ln(v)} = e^{\ln(u)} : e^{\ln(v)} = u : v = e^{\ln(u:v)}$$
$$e^{\ln(u^r)} = u^r = \left(e^{\ln(u)}\right)^r = e^{r \cdot \ln(u)}$$

Nimmt man nun jeweils auf beiden Seiten den ln, so ergeben sich die Behauptungen.

71/3 (T) bzw. 67/3 (NT)
a) $e^{x \cdot \ln(5)}$ d) $6 \cdot e^{x \cdot 4\ln(9)}$
b) $3 \cdot e^{x \cdot 3\ln(12)}$ e) $e^{x \cdot \ln(0,14)}$
c) $e^{x \cdot 2\ln(4)}$ f) $e^{x \cdot k \cdot \ln(b)}$ ($b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$!)

71/4 (T) bzw. 67/4 (NT)

a) $x = \ln(4)$
b) $x = \ln(2)/2$
c) $x = \ln(2)/4$
d) $x = 4\ln(4{,}9)$
e) $x = -2\ln(4/3)$
f) $x = \ln(1{,}25)/5$
g) $x = \ln(1{,}3685695)/\ln(1{,}04)$
h) $x = 7$

71/5 (T) bzw. 67/5 (NT)

a) $S_y(0|-1{,}7)$; $x_1 = \ln(20/3) \approx 1{,}9$ b) $x_2 = \ln(50/3) \approx 2{,}8$ c) $y = -2$

71/6 (T) bzw. 67/6 (NT)

G_f: $S_y(0|-1)$, $N\left(-\frac{\ln(2)}{3} \approx -0{,}23\middle|0\right)$ ==> 1

G_g: $S_y(0|-0{,}7)$, $N\left(2\ln\left(\frac{10}{3}\right) \approx 2{,}41\middle|0\right)$ ==> 2

G_h: $S_y\left(0 \mid -\frac{1}{5e} - 0{,}5 \approx -0{,}57\right)$, kein N ==> 3

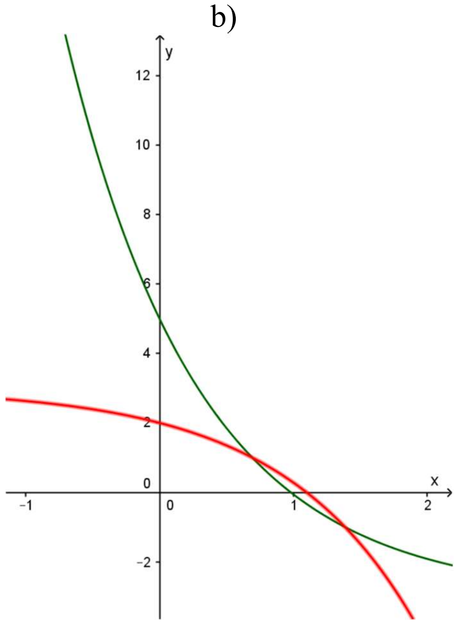
G_k: $S_y\left(0 \mid \frac{3}{e} - 1 \approx 0{,}10\right)$, $N(\ln(3) - 1 \approx 0{,}10|0)$ ==> 4

71/7 (T) bzw. 67/7 (NT) $a \leq e$

71/8 (T) bzw. 67/8 (NT; c: nicht im Lehrplan!!!)

a) G_f: $S_y(0|5)$, $N\left(\ln\left(\frac{8}{3}\right)\middle|0\right)$; G_g: $S_y(0|2)$, $N(\ln(3)|0)$ c) $S_1(\ln(2)|1)$, $S_2(\ln(4)|-1)$

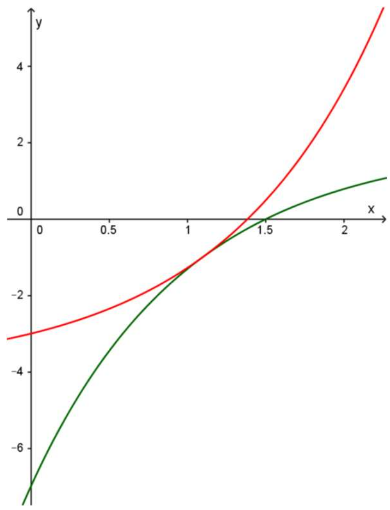
b)



71/9 (T) bzw. 67/9 (NT; c: nicht im Lehrplan!!!)

a) G_f: $S_y(0|-7)$, $N(\ln(4{,}5)|0)$; G_g: $S_y(0|-3)$, $N(\ln(4)|0)$ c) $S(\ln(3)|-1)$

b)



71/10 (T) bzw. 67/10 (NT) $t = \frac{\ln(4250)}{1{,}6094} \approx 5{,}191$ (Tage)

71/11 (T) bzw. 67/11 (NT)
a) Der Vorfaktor im Exponenten ist negativ. b) ≈ 28,7 mg c) ≈ 18,4 Tage

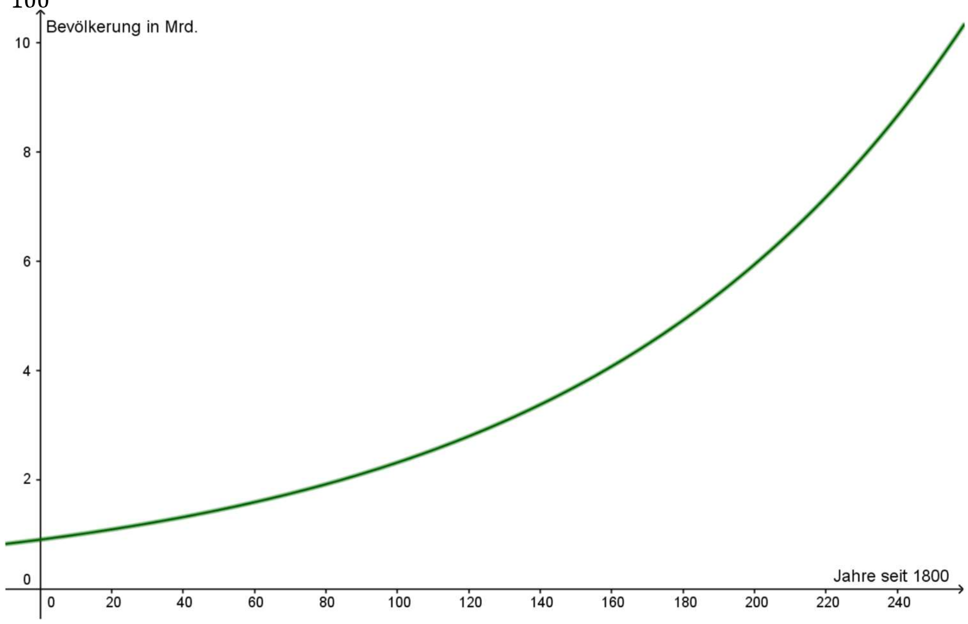
71/12 (T) bzw. 67/12 (NT) beide haben recht: $\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2^{-1}) = -1 \cdot \ln(2) = -\ln(2)$

75/2 (T) bzw. 71/2 (NT)
a) $f(t) = 167 \cdot 1{,}031^t \approx 167 \cdot e^{0{,}0305\,t}$ (*t* in Jahren, *f(t)* in Millionen Menschen)
b) ≈ 183,0; ≈ 213,2; ≈ 289,3 (jeweils Millionen Menschen) c) 2035

75/3 (T) bzw. 71/3 (NT) a) c ≈ 0,127 b) 200°C c) 22°C d) ≈ 16,11 (min)

75/6 (T) bzw. 71/6 (NT) a) ≈ 0,18 mm b) ≈ 9,66 Tage

76/1 (T) bzw. 72/1 (NT)
a) kein S b) $S(2 - \ln(6) \approx 0{,}21|1{,}5)$ c) $S(\ln(2) + 5 \approx 5{,}69|-2)$
76/2 (T) bzw. 72/2 (NT)
a) $B(150) = 3{,}7 \cdot 10^9$; $B(250) = 9{,}5 \cdot 10^9$
..... ==> $r = \frac{\ln\left(\frac{9{,}5}{3{,}7}\right)}{100} \approx 9{,}43 \cdot 10^{-3}$; $B_0 = 3{,}7 \cdot 10^9 \cdot e^{-150r} \approx 0{,}9 \cdot 10^9$



b) $\approx 6{,}96 \cdot 10^9$ ==> Das Modell sagt ≈ 6,8% weniger voraus als den tatsächlichen Wert.

76/3 (T) bzw. 72/3 (NT)
a) 23 500 € b) $k \approx -0{,}209$ c) Das Händlerangebot liegt etwa 10,3% unter dem Marktwert.
d) 500 € (reichlich unrealistisch! selbst nach 25 Jahren sind es immer noch knapp 624 €)

76/4 (T) bzw. 72/4 (NT) a) ≈ 38; ≈ 359; ≈ 3405 b) 1959

76/5 (T) bzw. 72/5 (NT)
k ist doch keine Gerätekonstante, sondern hängt von der Atmosphäre und der Schwerkraft ab!
a) k ≈ 0,000125 b) ≈ 705 hPa; ≈ 662 hPa; ≈ 327 m

Blatt:
1) a) 2,72 b) 7,39 c) 0,37 d) 0,14 e) 1,65 f) 0,61 g) 1,40 h) 3,90 i) 0,63

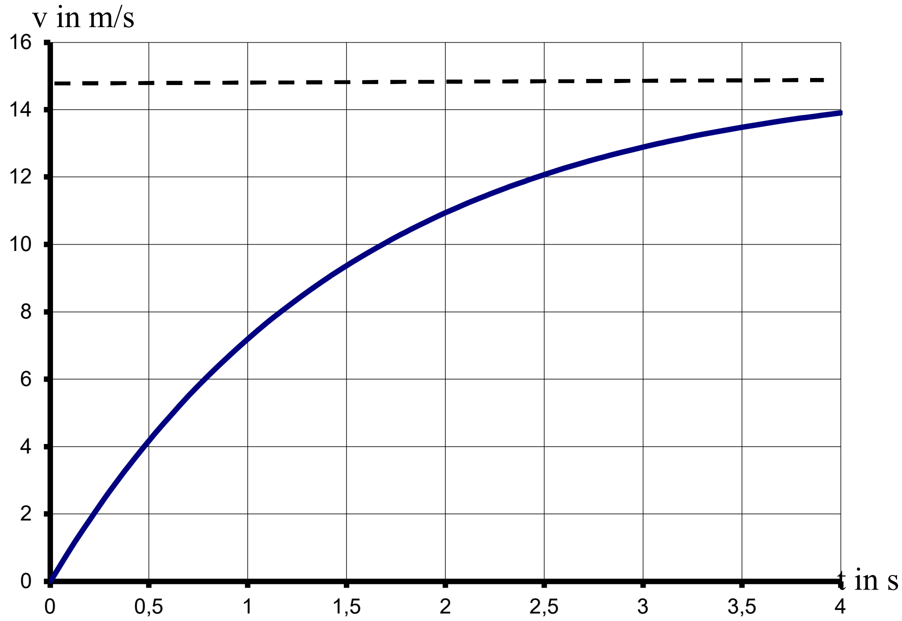
3) a) 0,69 b) 3,15 c) 1,04 d) –0,41 e) –3,00 f) 0,88 g) –1,15

4) a) 3 b) 0,5 c) 0,25 d) 9 e) 2 f) $\sqrt[3]{5}$ g) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ h) 0,125 i) $\frac{1}{3}$ j) 0,5 k) b^a l) c^{-t}
m) 0,25 n) 0,5 o) 2 p) 2 q) 2 r) 0,2

5) a) 4 b) –3 c) 0,25 d) 0,5 e) 0,4 f) $\frac{2}{3}$ g) ln 2 + 3 h) ln 3 – 1 i) ln 2 + 0,5 j) ln a + b
k) $\frac{k}{2}$ l) –0,5 m) $-\frac{3}{2}$ n) –ln 2 + $\frac{1}{3}$ o) ln 2 – ln 3 + 0,5 p) ln 3 – ln 4 + 0,5 q) –ln 2 – 0,25

6) a) $x = \frac{\ln 2}{3}$ b) x = 0 c) x = –2 ln 3 d) $x = \frac{\ln 4+1}{2}$ e) x = 1 + ln 2 f) $x = -2\ln\frac{2}{3}$
g) $x = \frac{1-\ln\frac{2}{3}}{0,4}$ = 2,5 (1 – ln 2 + ln 3) h) $x_{1,2} = \pm\sqrt{\ln 3}$
7) a) x = 0 b) x = –ln 2 c) x = 0 d) $x = -\frac{\ln 2}{3}$ e) x_1 = ln 2; x_2 = ln 3
f) x_1 = –ln 2; keine weitere Lösung g) x_1 = ln 3; keine weitere Lösung h) x_1 = ln 2; x_2 = ln 3

8) a) v(0) = 0; $\lim\limits_{t\to\infty} v(t) = 15$ ➔ am Anfang Geschwindigkeit 0 (Ruhe); Grenzgeschwindigkeit 15 m/s
b) $15 \cdot (1 - e^{-0,654 \cdot t}) = 9,0$ ➔ $e^{-0,654 \cdot t} = 0,4$ ➔ $t_1 = \frac{\ln 0,4}{-0,654} \approx 1,40$ (s)
c)



II.4 Ableitungen

<u>82/2</u> (T) bzw. <u>78/2</u> (NT) (zweiter Teil) e) $g'(x) = 4\,(x^3 + e^x)$ f) $g'(x) = 2e^{2x}$

<u>82/3</u> (T) bzw. <u>78/3</u> (NT) a) $f'(x) = 1 - e^x$

<u>93/4</u> (T) bzw. <u>89/4</u> (NT) a) $a = -2$ b) $a = -1$

<u>93/6</u> (T) bzw. <u>89/6</u> (NT)
a) $f'(x) = 4e^{4x}$
b) $f'(x) = -3e^{-x}$
c) $f'(x) = -\,e^{5-x}$
d) $f'(x) = -0{,}5\;e^{0{,}5x+1}$
e) $f'(x) = 3\;e^{1-2x}$

<u>94/9</u> (T) bzw. <u>90/9</u> (NT)
$f'(x) = \frac{1}{8}\;e^{3x+12}$ ==> $f'(\ln(2)-4) = \frac{1}{8}\;e^{3\ln(2)-12+12} = \frac{1}{8}\;\left(e^{\ln(2)}\right)^3 = \frac{1}{8}\cdot 2^3 = 1$

<u>113/5</u> (T) bzw. <u>105/5</u> (NT)
a) G(0) = 90; G_{ideal} = 70 b) $t_1 \approx 6{,}93$ (Monate) c) $t_1 = 5$ (Monate)

<u>II.5 Integration</u>

<u>123/2</u> (T) bzw. <u>113/2</u> (NT) z.B.!
i) (T) $F(x) = -e^{2x} - 3e^x + 0{,}7x$; $F(x) = -e^{2x} - 3e^x + 0{,}7x + 1$
i) (NT) $F(x) = 3e^x$; $F(x) = 3e^x + 1$
j) $F(x) = \frac{1}{9}e^{3x}$; $F(x) = \frac{1}{9}e^{3x} + 1$
k) $F(x) = e^{x-1}$; $F(x) = e^{x-1} + 1$
l) $F(x) = e^x - x$; $F(x) = e^x - x + 1$

<u>123/3</u> (T) bzw. <u>113/3</u> (NT)
g) (T) $\int\left(\frac{3}{2}e^{2x} - 11e^x + 3\right)dx = \frac{3}{4}e^{2x} - 11e^x + 3x + C$
i) (T) $\int(-0{,}7e^{2x} - 13e^x + 3)dx = -0{,}35e^{2x} - 13e^x + 3x + C$
i) (NT) $\int(1 - e^x)dx = x - e^x + C$
j) $\int(0{,}1e^{2x})dx = 0{,}05e^{2x} + C$
k) $\int(4e^{4x+4})dx = e^{4x+4} + C$
l) $\int(2x - 7 + e^{2x-7})dx = x^2 - 7x + \frac{1}{2}e^{2x-7} + C$

<u>123/8</u> (T) bzw. <u>113/7</u> (NT) rechte Seite ableiten (mit Kettenregel) ......

<u>123/10</u> (T) bzw. <u>113/9</u> (NT) grün: 1; rot: 3; gelb: 4; blau: 2

<u>130/1</u> (T) bzw. <u>120/1</u> (NT) $e^{2{,}5} - e^{3{,}5} \approx -20{,}93$

<u>130/5</u> (T) bzw. <u>120/5</u> (NT)
a) $F'(x) = (4\cdot e^{0{,}25x} + 2)' = e^{0{,}25} = f(x)$ (Kettenregel!) b) A = $4\cdot(e^2 - e) \approx 18{,}68$

<u>130/8</u> (T) bzw. <u>120/1</u> (NT)
$\int_0^6 45\cdot e^{-0{,}25x}dx = 180\cdot(1 - e^{-1{,}5}) \approx 140\;(\ell)$

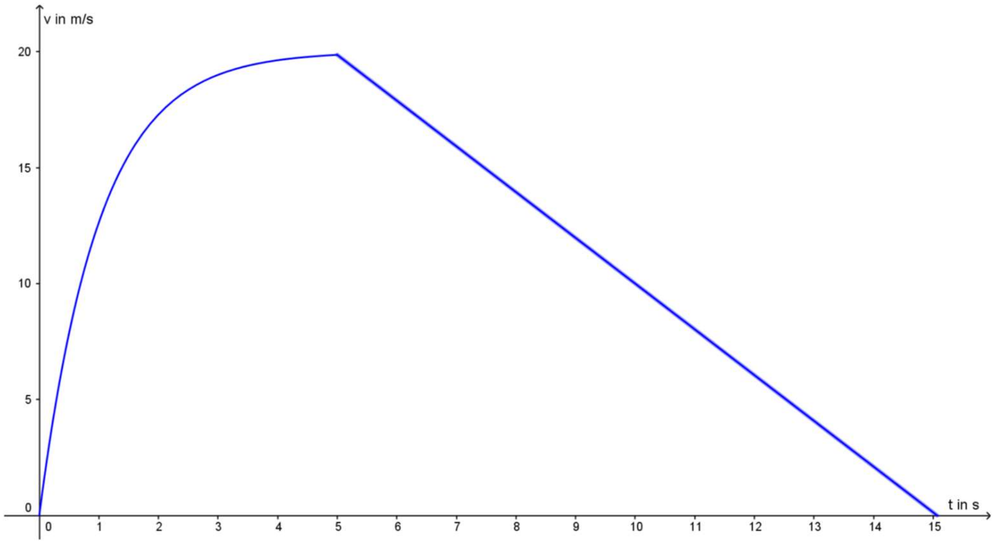
<u>131/1</u> (T) bzw. <u>121/1</u> (NT) b) $\int e^x dx = e^x + C$ $(C \in \mathbb{R})$

<u>131/2</u> (T) bzw. <u>121/2</u> (NT) c) ja e) nein

<u>131/8</u> (T) bzw. <u>121/8</u> (NT) b) $f(x) = 1\cdot e^{2x} + 4e\cdot 1$; $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + 4ex$

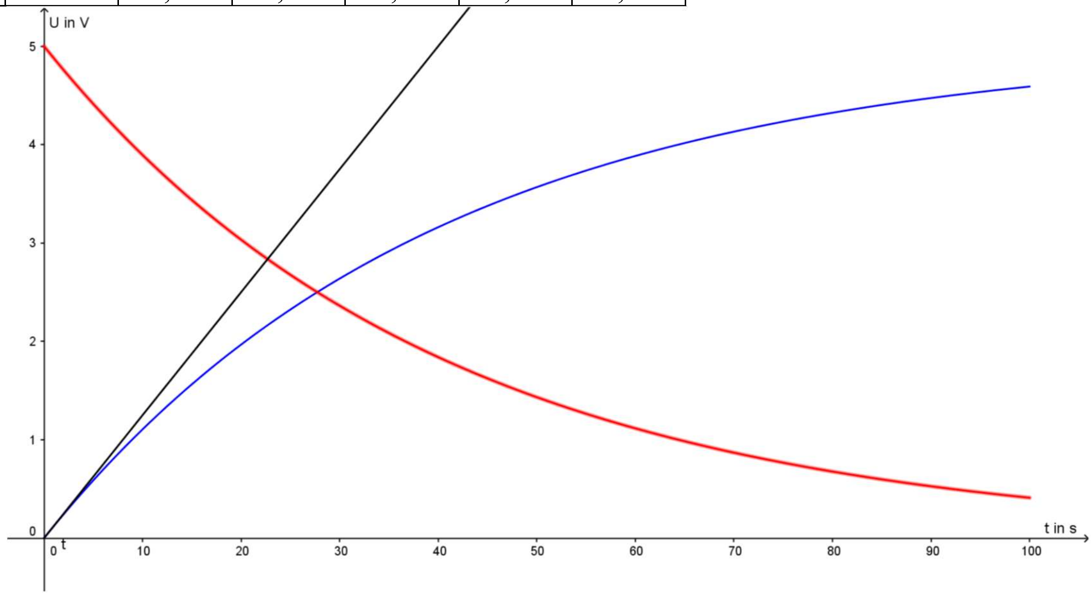
<u>133/11</u> (nur T)
Zur Begründung kann man das Globalverhalten und die Nst. von f verwenden, außerdem Monotonie usw.
==> gelb: G; rot: h; blau: f '; grün: F

<u>134/18</u>
a) $20e^{-5} + 80 \approx 80{,}1$ (m)
b) $m = a = -2\,(e^{-5} - 1)^2 \approx -1{,}97$
c)

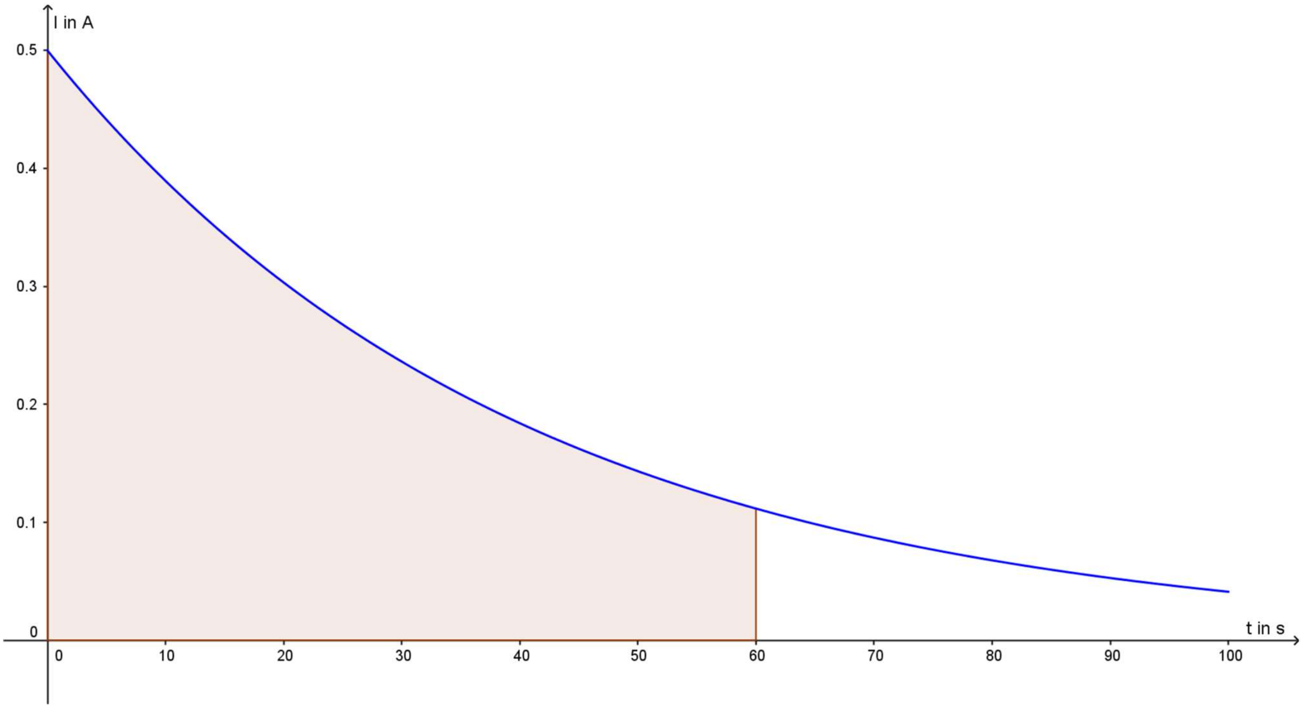


<u>134/19</u>
physikalisch falsch! $U_C(t)$ ist die Spannung, die der Kondensator selbst erzeugt, weil er Ladung trägt!
a) $\lim\limits_{t\to\infty} U_C(t) = U_0 = 5{,}00\,V$, d.h. auf lange Sicht erzeugt der Kondensator dieselbe Spannung wie die Quelle (allerdings entgegengesetzt!)
b) *Spannungen gerundet auf 2 Dezimalen; blau: U_C; rot: U_R; schwarz: Tangente*

t in s	0	20	40	60	80	100
U_C in V	0	1,97	3,16	3,88	4,32	4,59
U_R in V	5	3,03	1,84	1,12	0,68	0,41

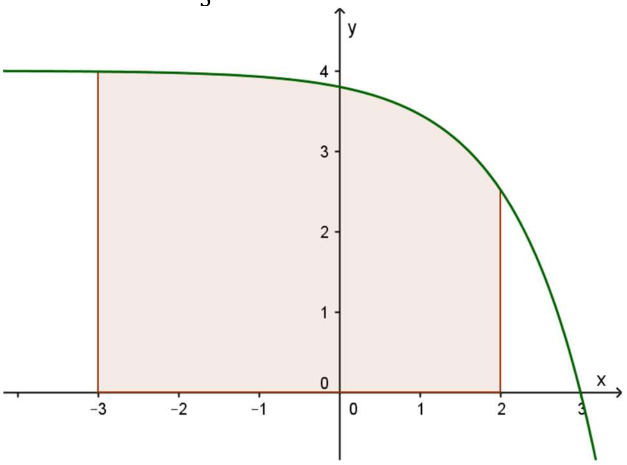


c) $\dot{U}_C(0) = 0{,}125$ (V/s); $\lim\limits_{t\to\infty} \dot{U}_C(t) = 0$ (V/s); Tangente: $y = 0{,}125\,t$
d)

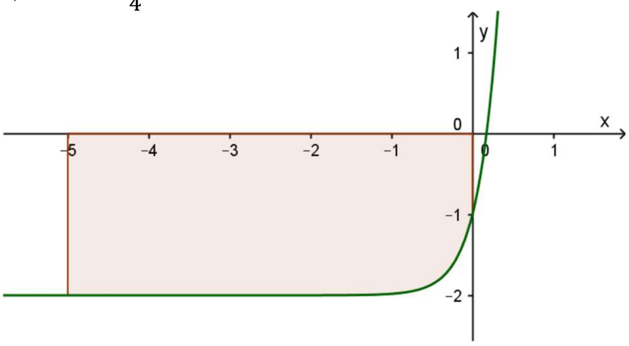


e) $Q(t) = 20 \cdot (1 - e^{-0{,}025t})$
==> $Q(60) = 20 \cdot (1 - e^{-1{,}5}) \approx 15{,}5$ = Inhalt der in (d) markierten Fläche
$\lim\limits_{t \to \infty} Q(t) = 20$

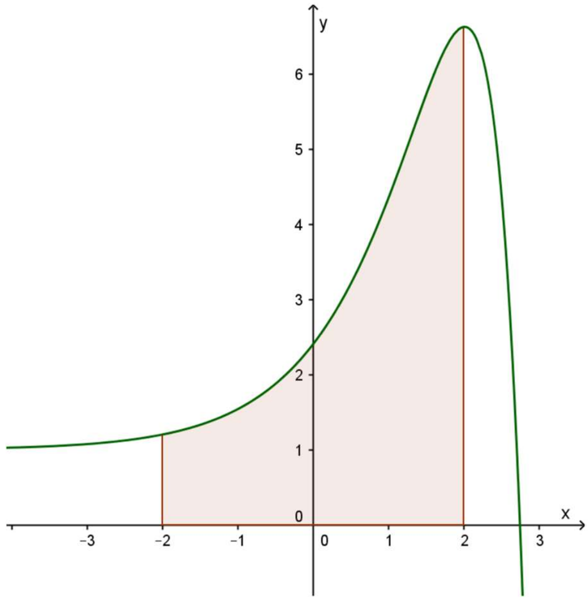
142/2 (T) bzw. 130/2 (NT)
d) A = $20 + \frac{e^{-3} - e^{2}}{5} \approx 18{,}53$



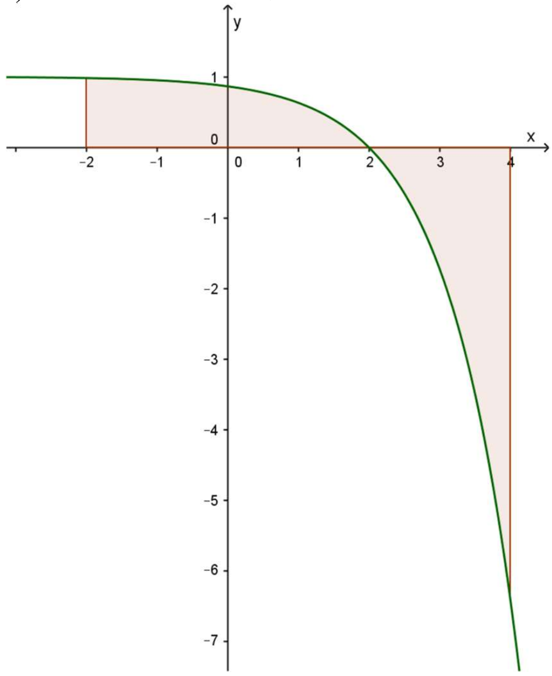
e) A = $\frac{39 - e^{-20}}{4} \approx 9{,}75$



h) (T) A = $-0{,}05e^{4} + 1{,}5e^{2} - 1{,}5e^{-2} + 0{,}05e^{-4} + 4 \approx 12{,}15$

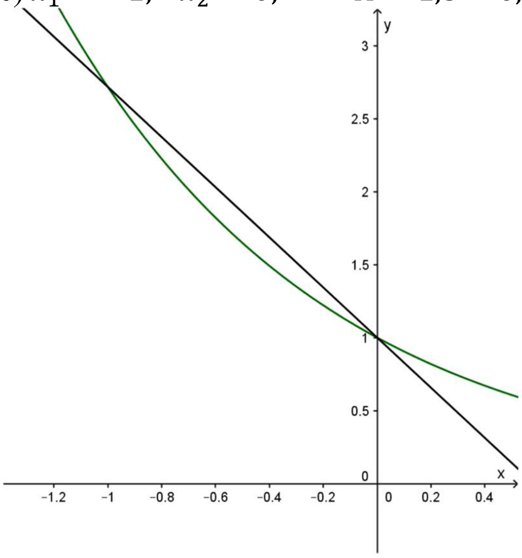


i) A = $e^2 + e^{-4} \approx 7{,}41$

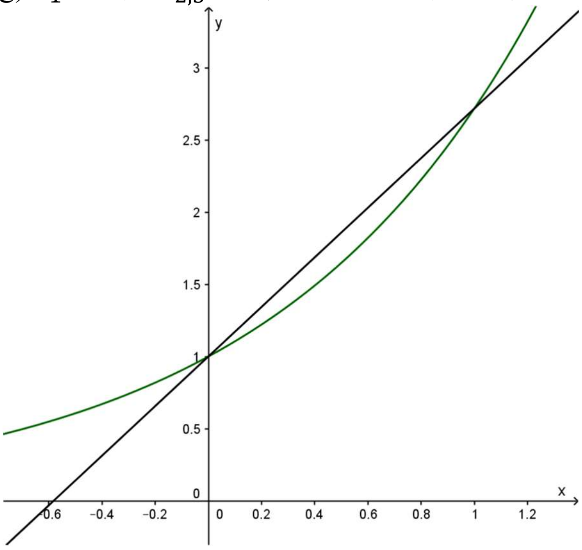


146/1 (T) bzw. 134/1 (NT) jeweils grün: G_f; schwarz: G_g

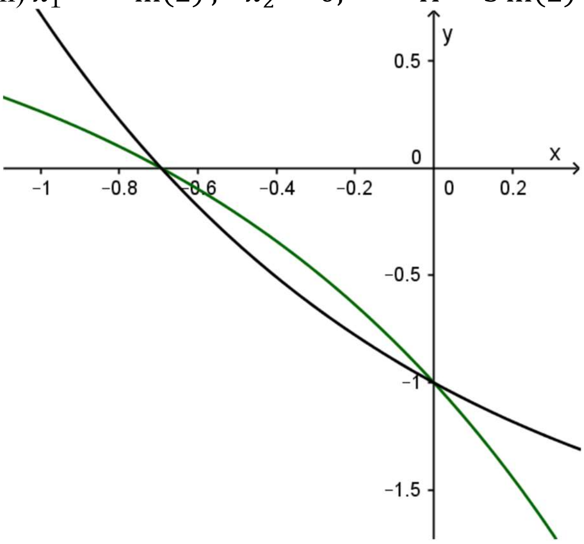
c) $x_1 = -1$; $x_2 = 0$; $A = 1{,}5 - 0{,}5e$



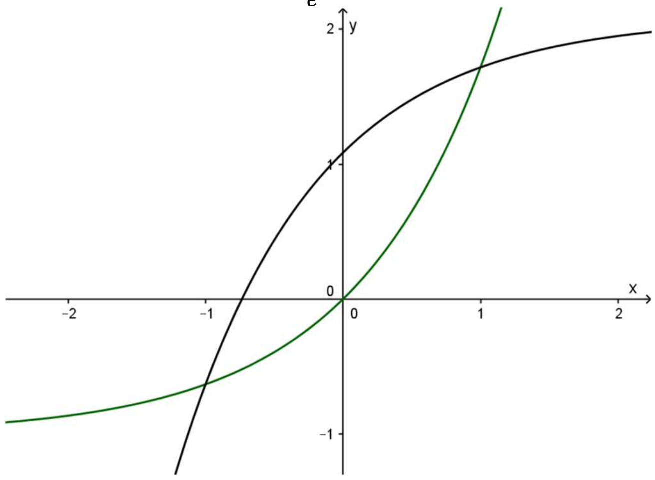
g) $x_1 = 0$; $x_{2,3} = 1$; $A = 1{,}5 - 0{,}5e$ (vgl. (c): an y-Achse gespiegelt!)



h) $x_1 = -\ln(2)$; $x_2 = 0$; $A = 3\ln(2) - 2$

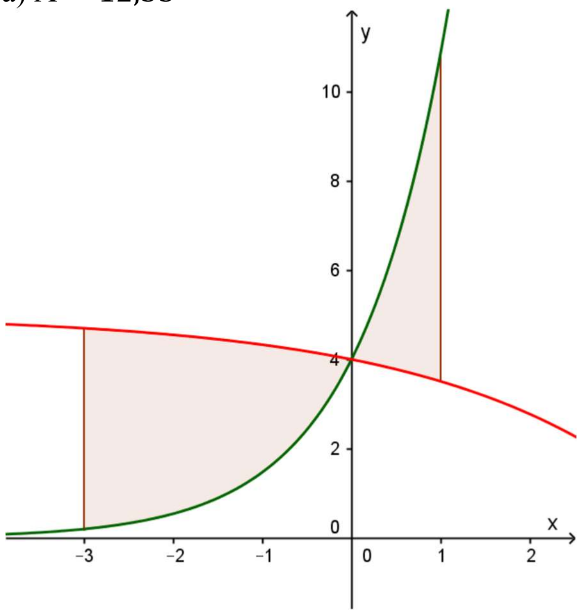


i) $x_{1,2} = \pm 1$; $A = \frac{4}{e}$

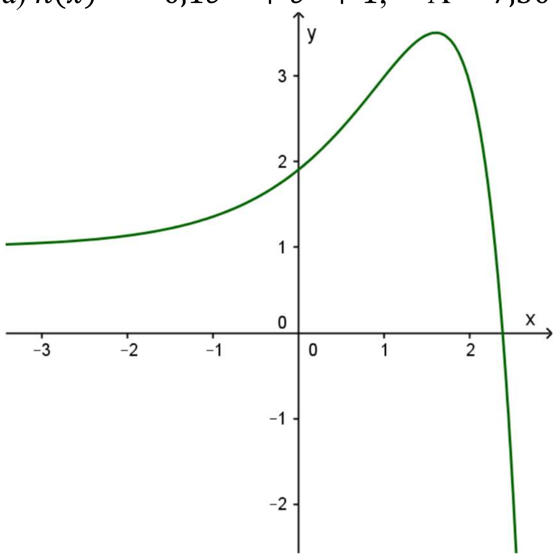


147/2 (T) bzw. 135/1 (NT)   e) $-e - 2\sqrt{e} + 2e^{-3/2} + e^{-3} + 24 \approx 18{,}48$

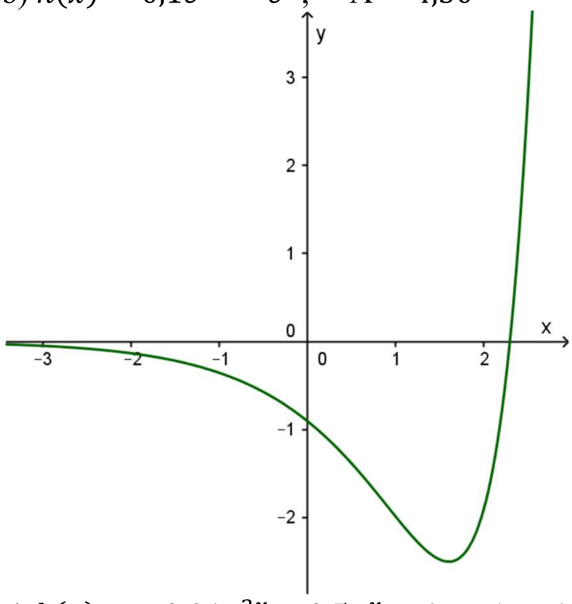
148/2 (T) bzw. 136/2 (NT)   grün: G_f;   rot: G_g
a) A $\approx 12{,}55$



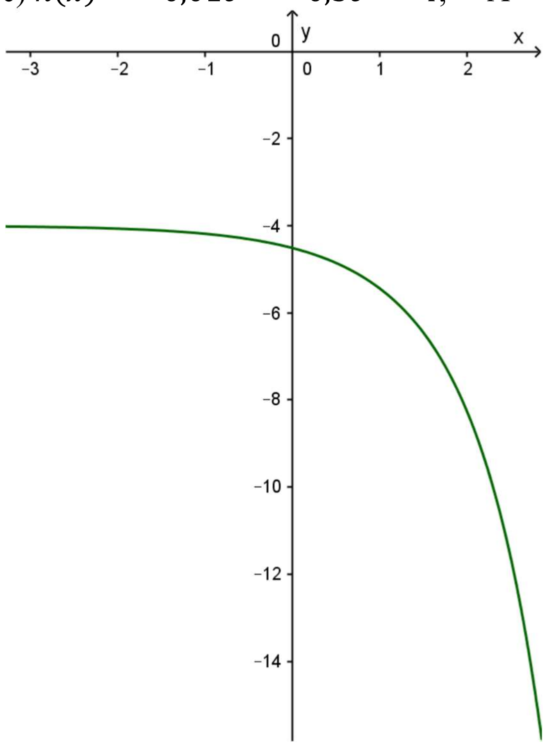
149/8 (nur T)   gemeint ist wohl: „ ... zwischen der x-Achse, G_h und ..."
a) $h(x) = -0{,}1e^{2x} + e^x + 1$;   A $\approx 7{,}30$



b) $h(x) = 0{,}1e^{2x} - e^{x}$; A ≈ 4,30



c) $h(x) = -0{,}01e^{2x} - 0{,}5e^{x} - 4$; A ≈ 15,78



<u>149/9</u> (nur T) gemeint ist eigentlich die Emissionsrate (Emission pro Jahr)
a) $s_1(0) = 398$ ==> c = 398; $s_1(16) = 562$ ==> ... k ≈ 0,0216
b) 1989; ≈ 10 576 = gesamte Emission von 1.1.1970 bis 1.1.1992

<u>150/13</u> (T) bzw. <u>138/12</u> (NT)
a) falsch (laut Abbildung halten 40% der Bevölkerung ca. 2% des Vermögens)
b) etwa 3,5%
c) Ich weiß nicht, mit welchen Punkten man auf dieses Ergebnis kommen soll... einige Beispiele:
P(0,7|0,1), Q(1|1) ==> $f(x) \approx 0{,}000464\ e^{7{,}675x}$
P(0,8|0,22), Q(1|1) ==> $f(x) \approx 0{,}00052\ e^{7{,}571x}$
P(0,7|0,1), Q(0,8|0,22) ==> $f(x) \approx 0{,}00040\ e^{7{,}885x}$
d) $\int_0^1 x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}\cdot 1^2 - \frac{1}{2}\cdot 0^2 = 0{,}5$
e) Gini-Koeffizient für Deutschland ≈ 0,741, also zwischen dem für Frankreich und dem für die USA