

I.1 Flächeninhalts- und Stammfunktionen

123/1 (T) bzw. 113/1 (NT) ja, alle

123/2 (T) bzw. 113/2 (NT) z. B.!

a) $F(x) = 4x$; $F(x) = 4x + 1$

b) $F(x) = -1,5x^2 + 8x$; $F(x) = -1,5x^2 + 8x - 2$

c) $F(x) = \frac{1}{6}x^3 + x^2$; $F(x) = \frac{1}{6}x^3 + x^2 + 0,5$

d) $F(x) = x - x^4$; $F(x) = x - x^4 + \sqrt{2}$

e) $F(u) = 2,5u^2 + 3u$; $F(u) = 2,5u^2 + 3u + \pi$

f) $F(x) = -\frac{1}{5}x^4 + 5x^2$; $F(x) = \frac{1}{5}x^4 + 5x^2 + 0,001$

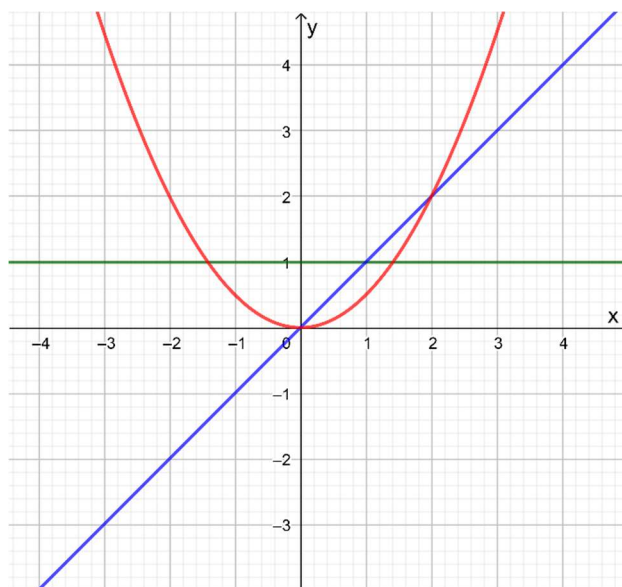
g) $F(x) = -\frac{1}{5}x^5 - 2x^3 + 8x$; $F(x) = -\frac{1}{5}x^5 - 2x^3 + 8x - 2,3$

h) $F(t) = \frac{4}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^2 + 9t$; $F(t) = \frac{4}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^2 + 9t - \frac{\sqrt{3}}{5}\pi$

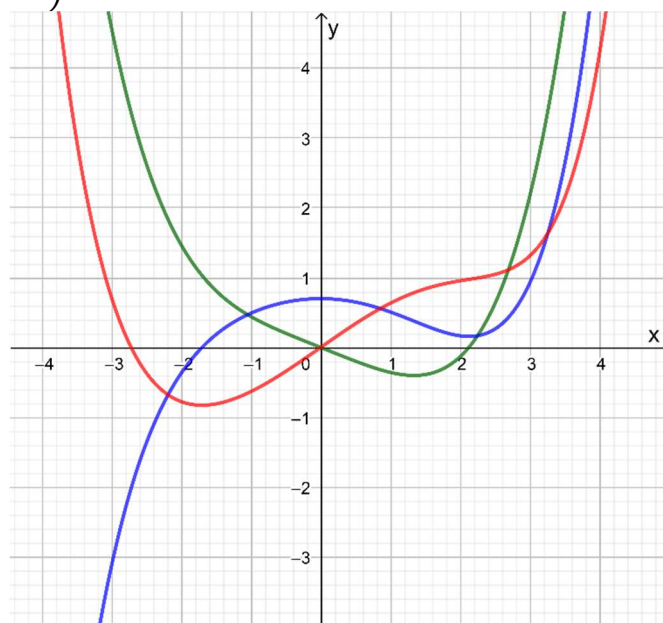
126/1 (T) bzw. 116/1 (NT) Begründung jeweils mit Monotonie, Exp, ... a) 3;4 b) 1; 6 c) 2; 5

126/2 (T) bzw. 116/2 (NT) jeweils grün: $G_{f'}$, rot: G_F

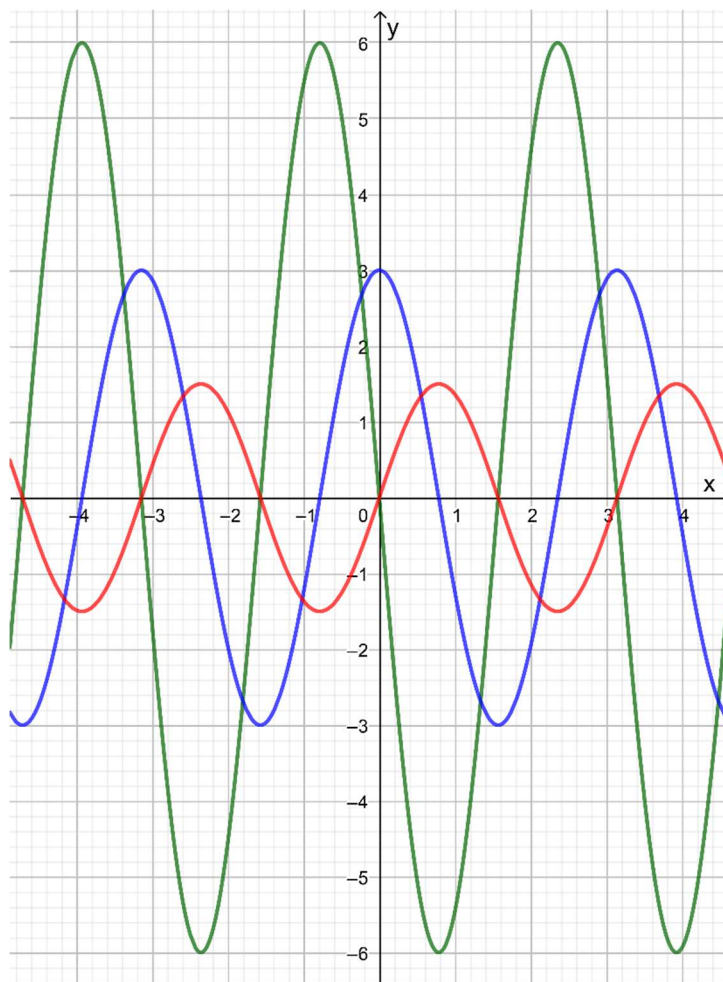
a)



b) $\left(f(x) = \frac{x^5}{120} - 0.2x^2 + 0.7\right)$



c) $(f(x) = 3 \cos(2x))$



126/3 (T) bzw. 116/3 (NT)

a) w

b) w

c) f

d) w

130/2 (T) bzw. 120/2 (NT)

a) $G_f: A_0(x) = 0,75x^2$;

$G_g: A_0(x) = 2x$;

$G_h: A_0(x) = 0,25x^2 + x$;

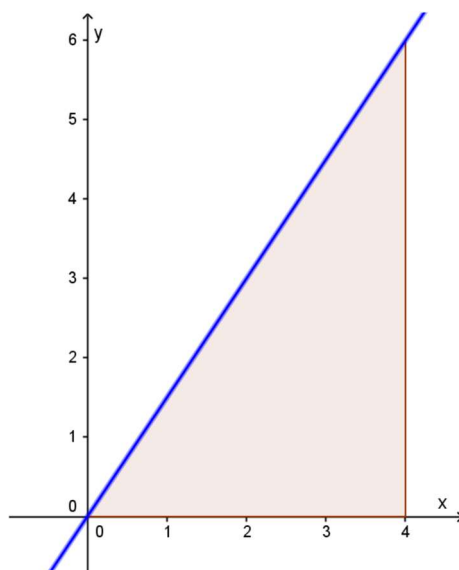
$G_i: A_0(x) = 0,25x^2 + 2x$

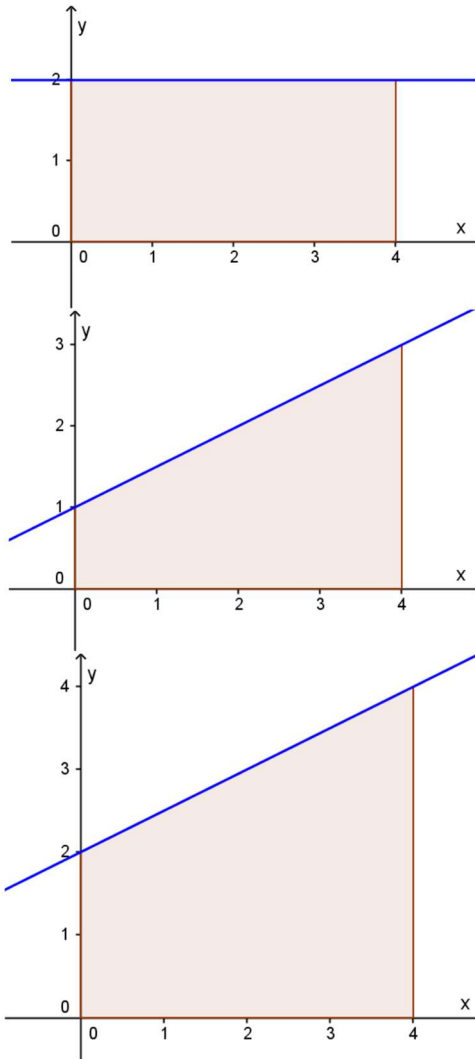
b) $G_f: A_0(4) = 12$;

$G_g: A_0(4) = 8$;

$G_h: A_0(4) = 8$;

$G_i: A_0(4) = 12$





131/3 (T) bzw. 121/3 (NT)
a) 2F, 1f b) 1F, 2f

Begründungen mit Grad, Monotonie, ...
c) 1F, 2f d) 1F, 2f

131/6 (T) bzw. 121/6 (NT)

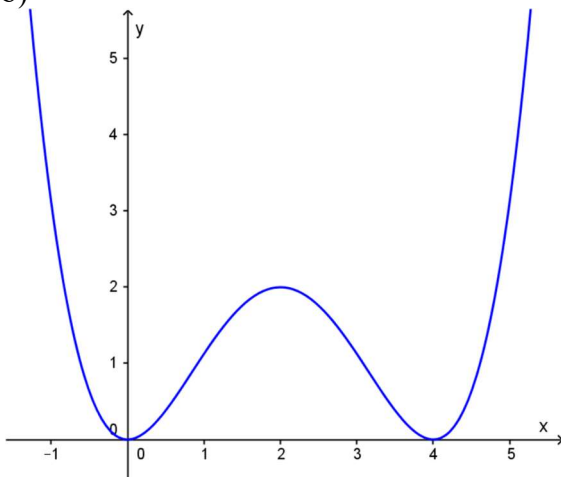
a) grün b) gelb c) grün

131/7 (T) bzw. 121/7 (NT)

a) $F'(x) = f(x) \implies G_F$ ist smf in $]-\infty; 0]$ und $[2; 4]$, sms in $[0; 2]$ und $[4; \infty[$
 $\implies$ Min.st.: 0 und 4; Max.st.: 2

We.st. von F = Ex.st. von $f \implies$ etwa 0,8 und etwa 3,2

b)



c) 1,125; 1,7578125; 2

d) Beziehung zur gegebenen Abbildung: Flächeninhalte zwischen G_f und x-Achse im Bereich zwischen 0 und 1 bzw. zwischen 0 und 1,5 bzw. zwischen 0 und 2

Beziehung zur Skizze in (b): Differenz von y-Werten an den Stellen 0 und 1 bzw. 0 und 1,5 bzw. 0 und 2; da $F(0) = 0$ ist, sogar gleich y-Werten an den Stellen 1 bzw. 1,5 bzw. 2

131/8 (T) bzw. 121/8 (NT)

a) $f(x) = 8x^3 + \frac{1}{2}x^2$; $F(x) = 2x^4 + \frac{1}{4}x^2$

c) $f(x) = 9x^2 + 6x$; $F(x) = 3x^3 + 3x^2 + 3x$

132/9 (nur T) A: 4;11 B: 5;9 C: 8;12 D: 6; 10

122/9 (nur NT) $K(x) = 0,0003x^3 - 0,004x^2 + 0,04x + 1$

133/10 (T) bzw. 122/11 (NT)

Begründungen: Monotonie, Grad, G_1 : g G_2 : f G_3 : f' G_4 : F

133/12 (T) bzw. 122/10 (NT)

Wenn F eine Stammfunktion zu f ist, dann ist auch $F(x) + C$ mit beliebigem $C \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion zu f $\implies$ es gibt unendlich viele Stammfunktionen („Aufleitungen“).

133/13 (T) bzw. 122/12 (NT) $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^3 - x^2 + 8x - 8$

I.2 Das Integral

123/3 (T) bzw. 113/3 (NT) $C \in \mathbb{R}$

a) $\int (x + 5)dx = \frac{1}{2}x^2 + 5x + C$

b) $\int 5x dx = \frac{5}{2}x^2 + C$

c) $\int x^5 dx = \frac{1}{6}x^6 + C$

d) $\int (2,7x^2 - 6x)dx = 0,9x^3 - 3x^2 + C$

e) $\int (-\frac{1}{6}x^2 + 81)dx = -\frac{1}{18}x^3 + 81x + C$

f) $\int (3,5x - 4,8x^3)dx = 1,75x^2 - 1,2x^4 + C$

g) (NT) $\int (2,5x^4 - 12x^2 + 4)dx = 0,5x^5 - 4x^3 + 4x + C$

h) $\int (\frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x)dx = \frac{1}{32}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - 3x^2 + C$

123/5 (T) bzw. 113/5 (NT) z. B.:

$$\int (\frac{3}{4}x^6 - 2,37x^3 + \pi x^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}x + 200)dx + \int (-\frac{3}{4}x^6 + 2,37x^3 - \pi x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}x - 199)dx = \int 1 dx = x + C$$

123/6 (T) bzw. 113/6 (NT)

$(\int a \cdot f(x) dx)' = a \cdot f(x)$ (Definition des unbestimmten Integrals)

$= a \cdot (\int f(x) dx)'$ (Definition des unbestimmten Integrals)

$= (a \cdot \int f(x) dx)'$ (Faktorregel der Differenziation)

$(\int (f(x) + g(x)) dx)' = f(x) + g(x)$ (Definition des unbestimmten Integrals)

$= (\int f(x) dx)' + (\int g(x) dx)'$ (Definition des unbestimmten Integrals)

$= (\int f(x) dx + \int g(x) dx)'$ (Summenregel der Differenziation)

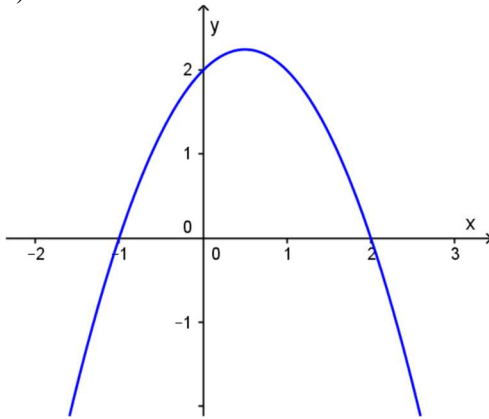
123/9 (T) bzw. 113/8 (NT) bei allen: $F(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 + C$

gelb: $C = -4$; blau: $C = 0$; grün: $C = 2$; rot: $C = 4$

130/3 (T) bzw. 120/3 (NT)

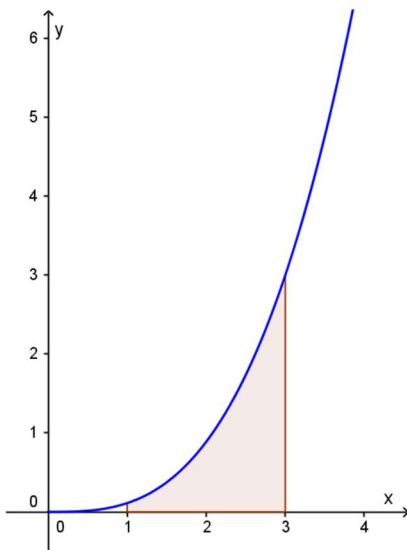
a)

b) $A = 4,5$



130/4 (T) bzw. 120/4 (NT)

$A = \frac{20}{9}$



130/6 (T) bzw. 120/6 (NT)

$$A_0(z) = A_{\text{Rechteck}} + A_{\text{Dreieck}} = z \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot z \cdot (f(z) - 2) = \dots = 0,15z^2 + 2z \implies A'_0(z) = f(z)$$

130/7 (T) bzw. 120/7 (NT)

$A = \frac{32}{3}$

131/1 (T) bzw. 121/1 (NT) $C \in \mathbb{R}$

a) $\int (0,5x^2 + 3x) dx = \frac{1}{6}x^3 + 1,5x^2 + C$

c) $\int (\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 5x + 6) dx = \frac{1}{12}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 2,5x^2 + 6x + C$

d) $\int (2x^3 + 0,25x^2 + \pi) dx = 0,5x^4 + \frac{1}{12}x^3 + \pi x + C$

131/2 (T) bzw. 121/2 (NT)

a) nein

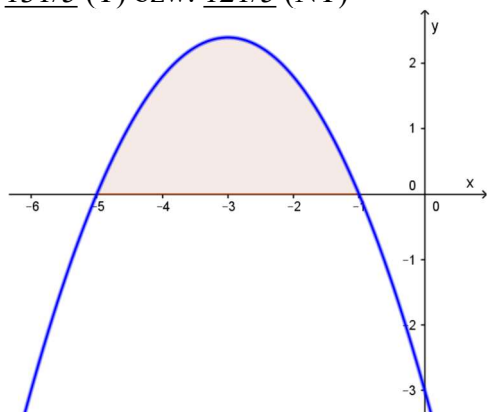
b) ja

131/4 (T) bzw. 121/4 (NT)

Beide brauchen gleich viel Material: Bei beiden ist die Querschnittsfläche gleich 2,16.

131/5 (T) bzw. 121/5 (NT)

$$A = 6,4$$



133/14 (nur T)

$$f(x) = \frac{1}{16}x^4 + \frac{3}{8}x^3 - 2x$$

142/1 (T) bzw. 130/1 (NT)

a) $\frac{20}{3}$

d) 7,5

b) $\frac{5375}{12}$

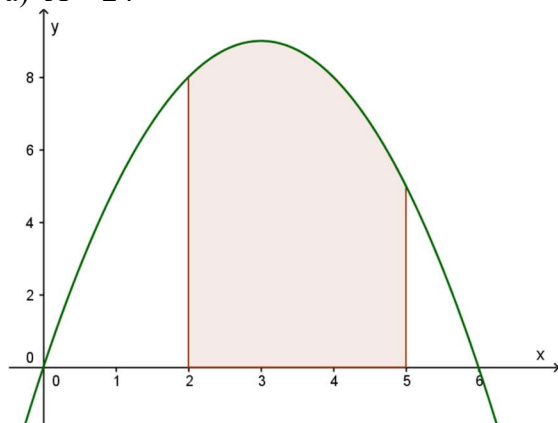
e) 130

c) 171

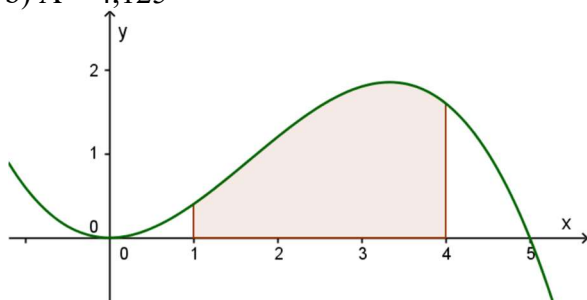
f) 168

142/2 (T) bzw. 130/2 (NT)

a) $A = 24$



b) $A = 4,125$



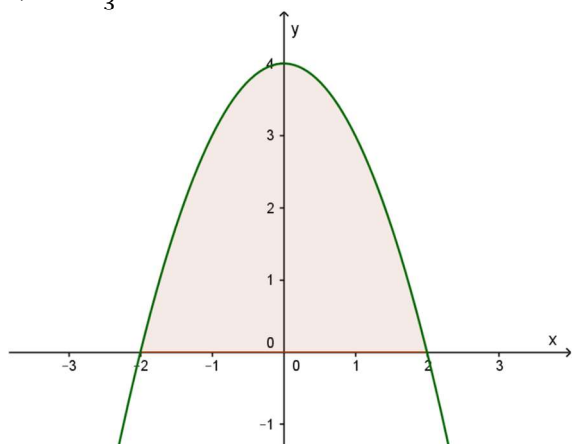
142/3 (T) bzw. 130/3 (NT)

a) 1656

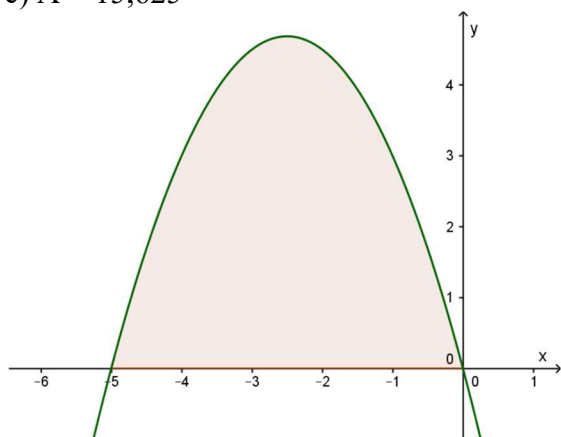
b) 280,8

142/4 (T) bzw. 130/4 (NT)

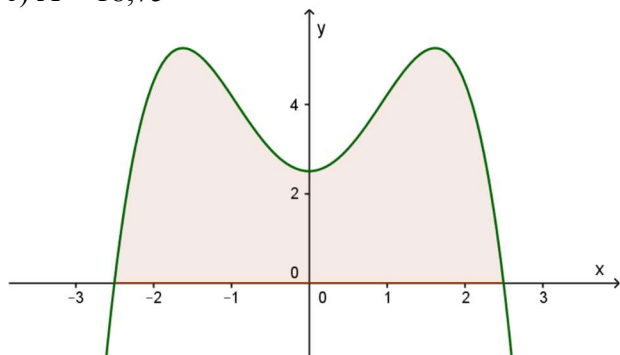
b) $A = \frac{32}{3}$



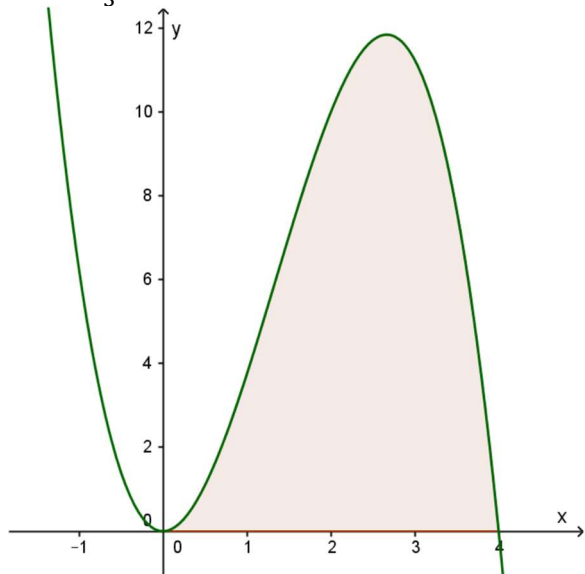
c) $A = 15,625$



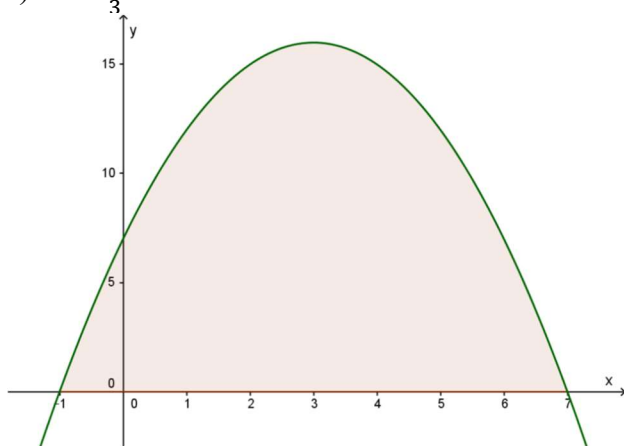
e) $A = 18,75$



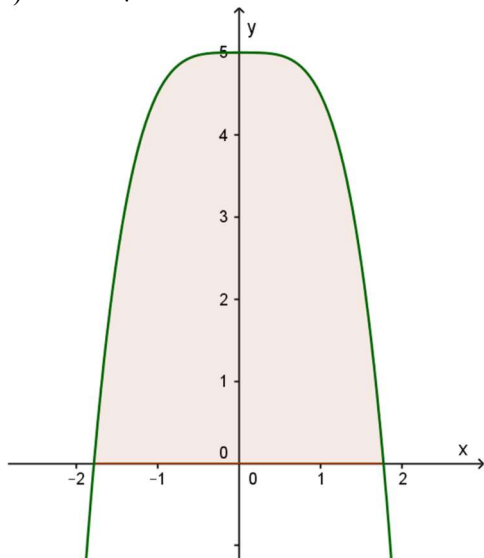
g) $A = \frac{80}{3}$



h) $A = \frac{256}{3}$



i) $A = 8 \sqrt[4]{10}$



143/7 (T) bzw. 131/7 (NT)

Aus der Schreibweise des Intervalls kann man folgern, dass $b \geq 2$ sein sollte. Dann gibt es nur eine Lösung, nämlich $b = 4$.

143/8 (T) bzw. 131/8 (NT)

In beiden Fällen hat der Spiegel einen Flächeninhalt von 4 m^2 , der Verschnitt beträgt also 2 m^2 .

143/9 (T)

a) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x$

b) $A = \frac{64}{3}$

c) $A = \frac{32}{3}$

143/10 (T) bzw. 131/10 (NT)

a) $f(x) = -\frac{1}{160}(x - 200)^2 + 750$

b) $A = \frac{1\,600\,000}{3} (\text{mm}^2)$, also etwa $0,53 \text{ m}^2$

148/4 (T) bzw. 136/4 (NT)

Koordinatensystem wählen: x-Achse am Boden, y-Achse in der Mitte
Parabel wird beschrieben durch $f(x) = -\frac{1}{10}x^2 + 20 \Rightarrow V = \frac{100\,000}{3} (\text{m}^3) \Rightarrow 34 \text{ Ventilatoren}$

148/5 (T) bzw. 136/5 (NT)

Das Grundstück hat einen Wert von etwa $193\,167 \text{ €}$, das Angebot ist also etwa 1% zu teuer.

148/7 (T) bzw. 136/7 (NT)

a) $a = 6$

c) $a = \pm 2$

b) $a = -6$ oder $a = 4$

d) $a = \pm\sqrt{15}$

149/10 (T) bzw. 137/8 (NT) 1 Kästchen hat hier die Seitenlänge 0,5 cm; in $g(x)$ muss $-\frac{1}{2}x^2$ stehen

aufgemaltes Auge: $A = 40 \text{ (cm}^2\text{)} \implies m = 80 \text{ g}$

ausgesägtes Auge: $A = 40 - \frac{\pi}{4} \text{ (cm}^2\text{)} \implies m \approx 78,4 \text{ g}$

137/9 (nur NT)

Annahme: Die beiden Begrenzungslinien sind Stücke von Parabeln; i. F. x und $f(x)$, $g(x)$ in m

$\implies$ oben: $f(x) = -0,2(x - 4)^2 + 5$; unten: $g(x) = 0,2(x - 6)^2 + 1$

$\implies$ eingeschlossene Fläche: $14,4 \text{ m}^2 \implies$ Volumen der Grube: $8,64 \text{ m}^3 \implies 9 \text{ m}^3$ bestellen

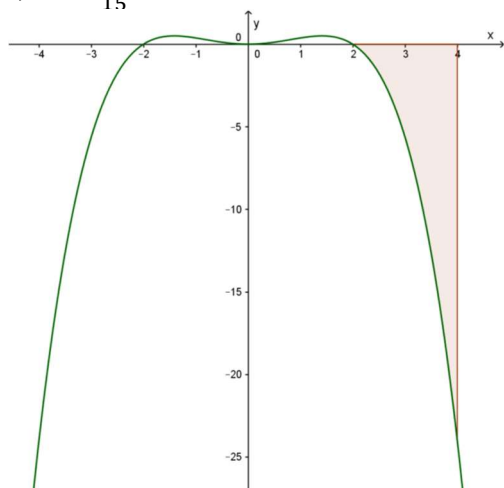
149/11 (T) bzw. 137/10 (NT) $V \approx 4583 \text{ (m}^3\text{)}$

149/12 (T) bzw. 137/11 (NT) mit $S(0|36)$, $x_{1,2} = \pm 39$ folgt: $A \approx 1872 \text{ (m}^2\text{)} \implies$ etwa 3,74 Millionen €

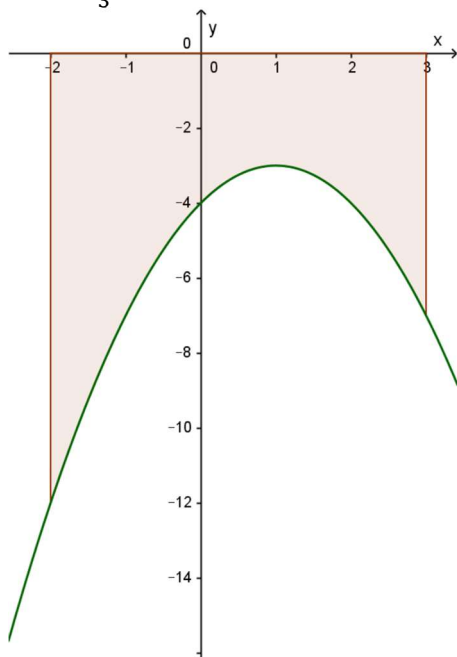
I.3 Flächenberechnungen

142/2 (T) bzw. 130/2 (NT)

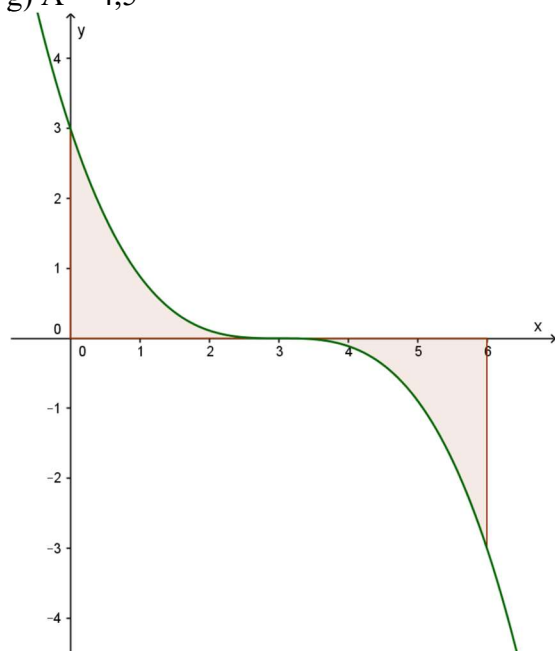
c) $A = \frac{232}{15}$



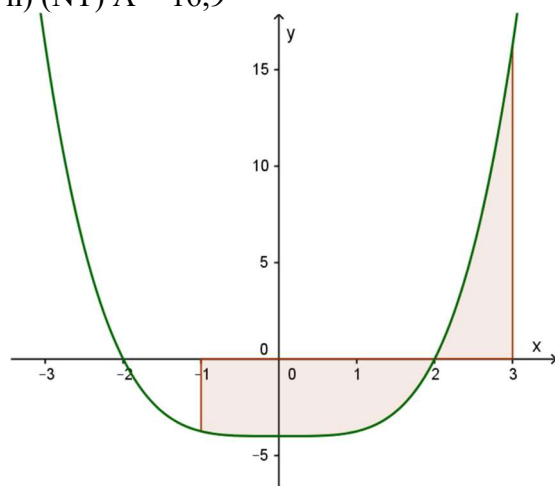
f) $A = \frac{80}{3}$



g) $A = 4,5$

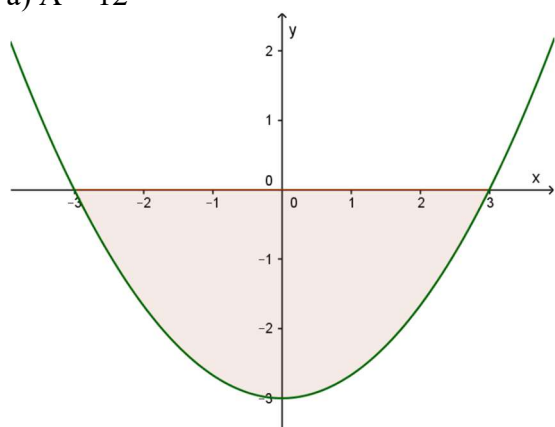


h) (NT) $A = 16,9$

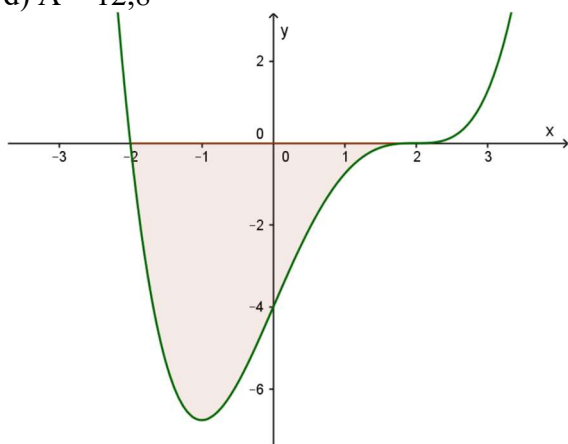


142/4 (T) bzw. 130/4 (NT)

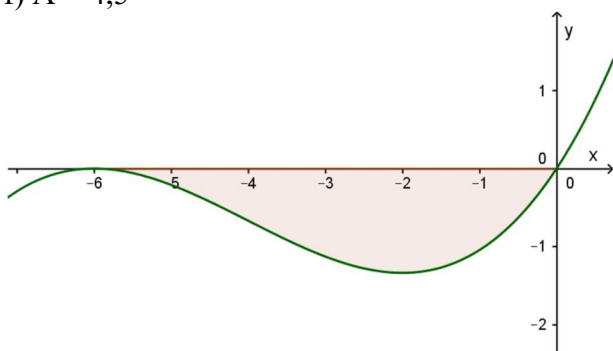
a) $A = 12$



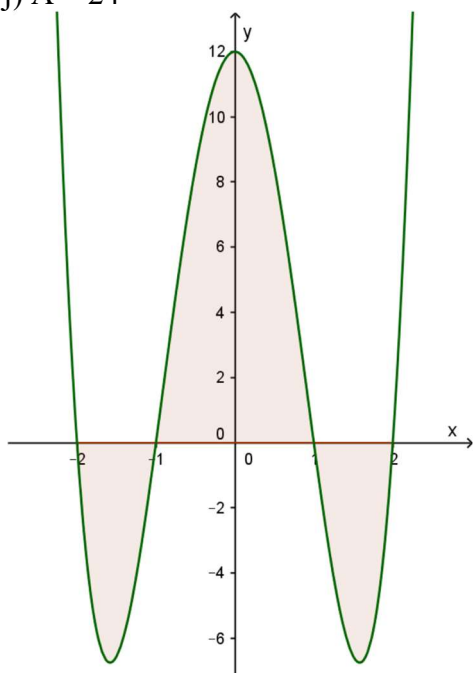
d) $A = 12,8$



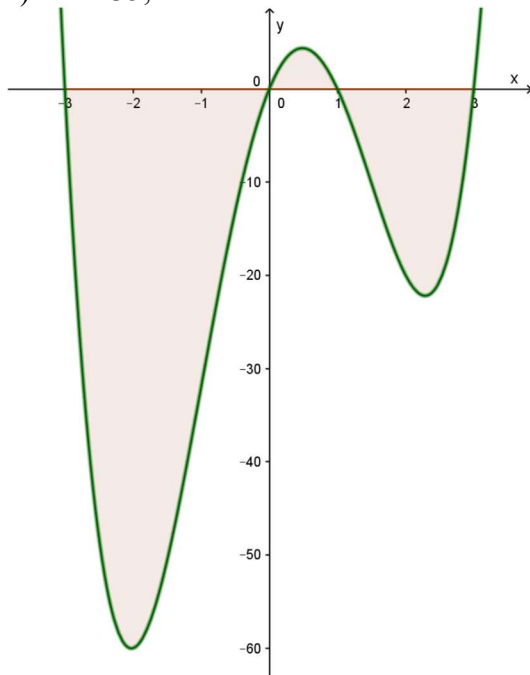
f) $A = 4,5$



j) $A = 24$



k) $A = 135,4$



143/5 (T) bzw. 131/5 (NT)

a) $A = 13,875$

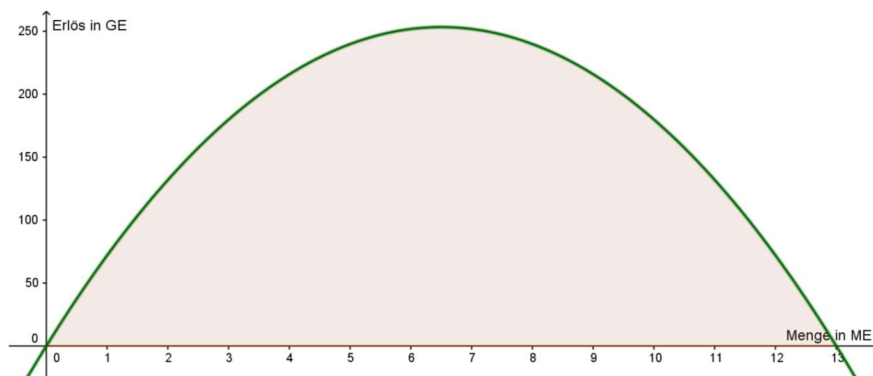
b) 176,45

143/6 (T) bzw. 131/6 (NT)

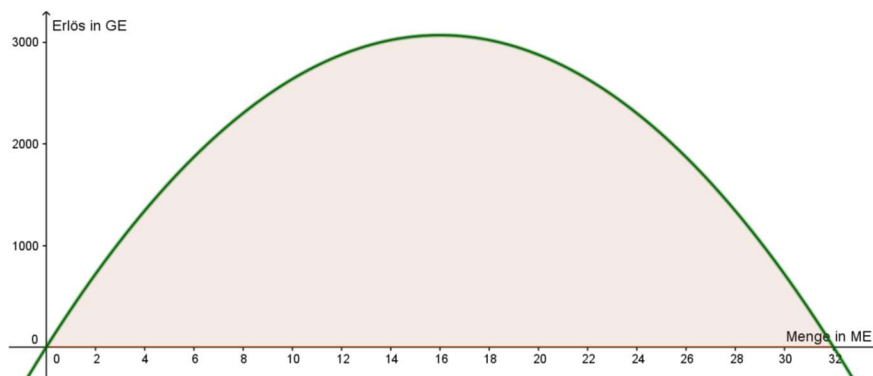
Für $m > -1$ oder $m < -4$ ist die Aufgabe ohne Hilfsmittel lösbar ($m = 3$ bzw. $m = -6,2$); ansonsten ist sie eine ziemlich Zumutung (nach langer Rechnerei folgt, dass es dann keine Lösung gibt).

131/9 (NT)

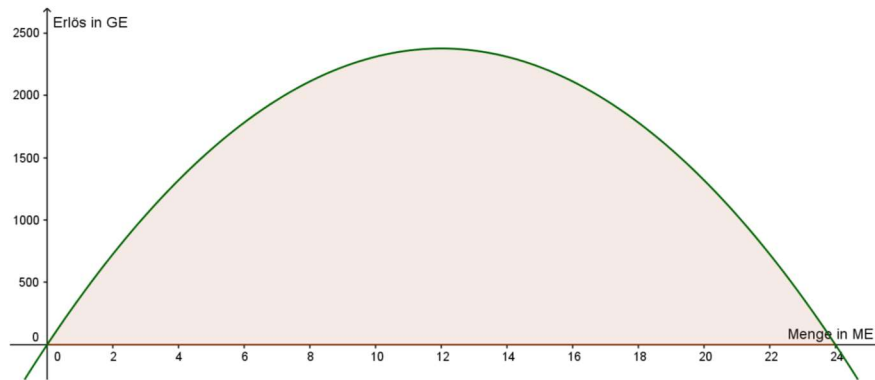
a) 2 197 GE



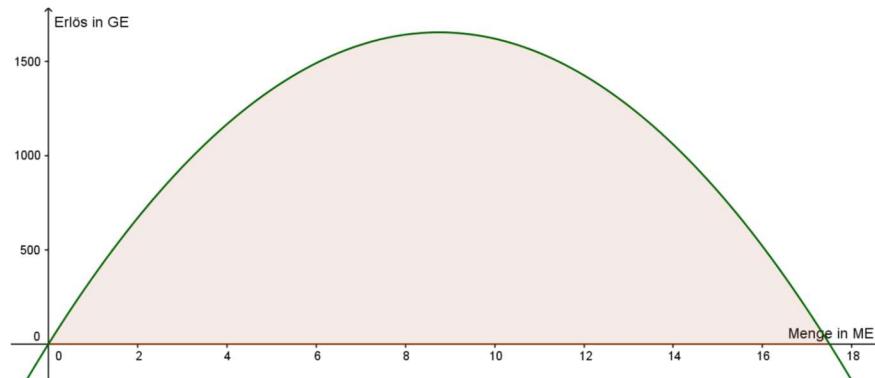
b) 65 536 GE



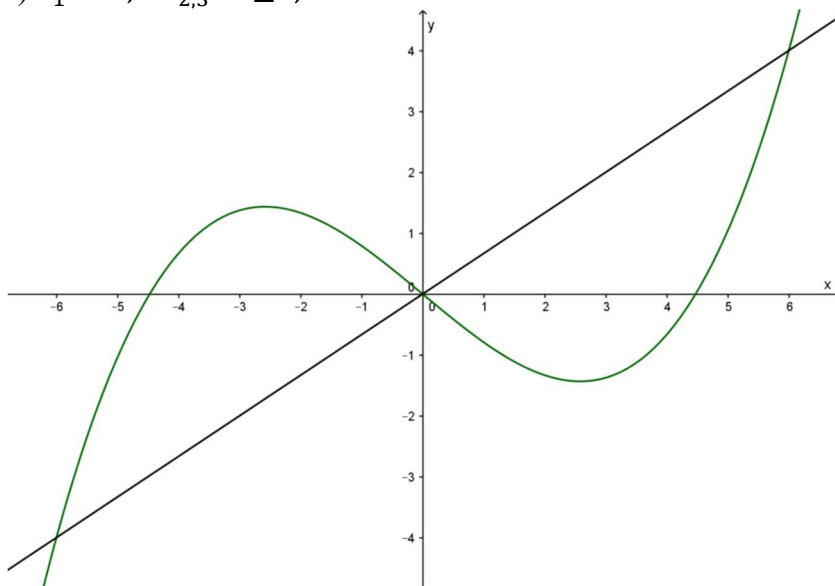
c) 38 016 GE



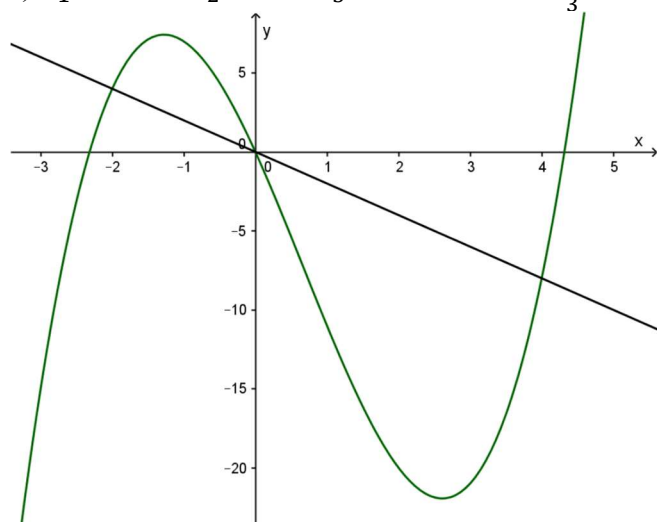
d) 19 293,75 GE



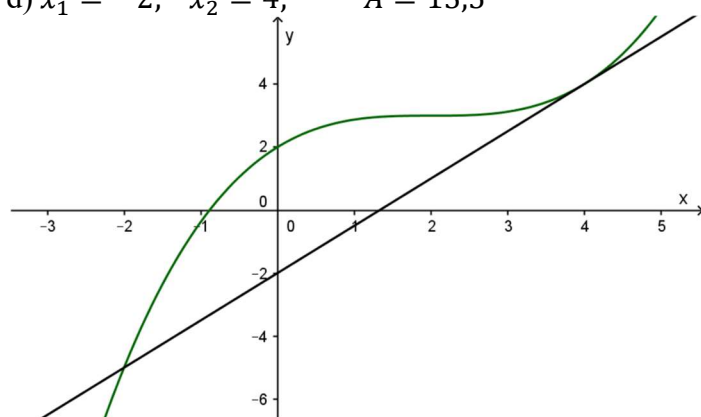
$\frac{146}{1}$ (T) bzw. $\frac{134}{1}$ (NT) jeweils grün: G_f ; schwarz: G_g
a) $x_1 = 0$; $x_{2,3} = \pm 6$; $A = 27$



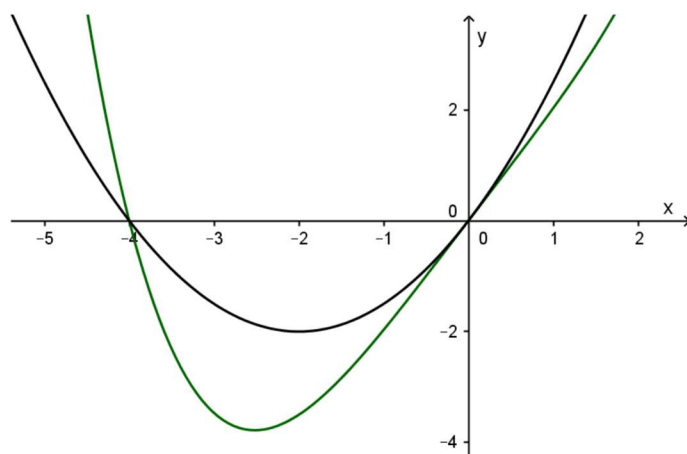
b) $x_1 = -2; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = 4; \quad A = \frac{148}{3}$



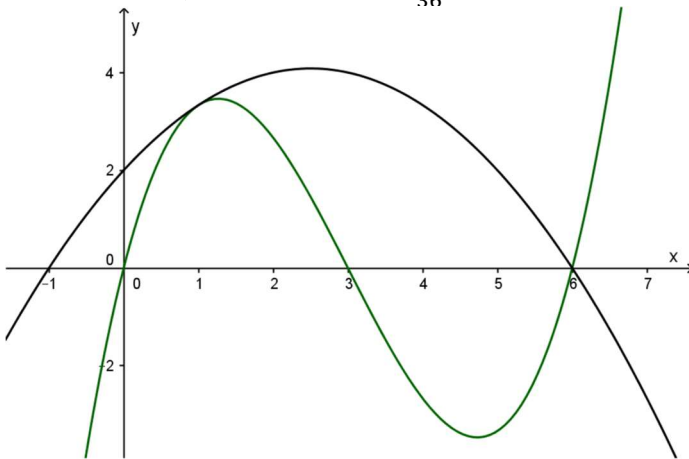
d) $x_1 = -2; \quad x_2 = 4; \quad A = 13,5$



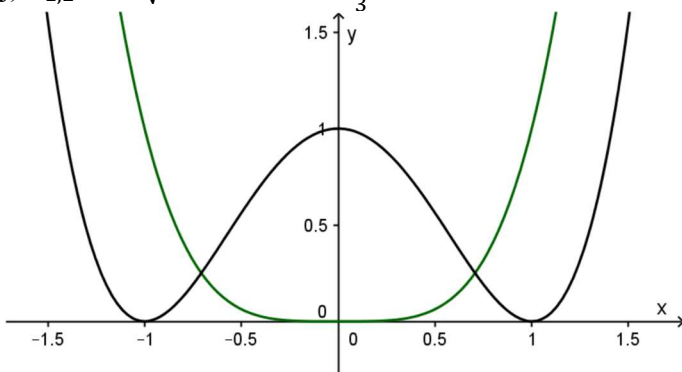
e) $x_1 = 0; \quad x_{2,3} = \pm 4; \quad A = \frac{64}{15}$



f) $x_1 = 1; x_{2,3} = 6; A = \frac{625}{36}$



j) $x_{1,2} = \pm\sqrt{0,5}; A = \frac{2}{3}\sqrt{2}$



147/2 (T) bzw. 135/2 (NT)

a) $\frac{59}{6}$

c) 19,8

b) $\frac{155}{3}$

d) $\frac{20}{3}$

f) 77,65

147/3 (T) bzw. 135/3 (NT)

a₁) neg.

a₂) neg.

a₃) pos.

b₁) –

b₃) W

b₅) U

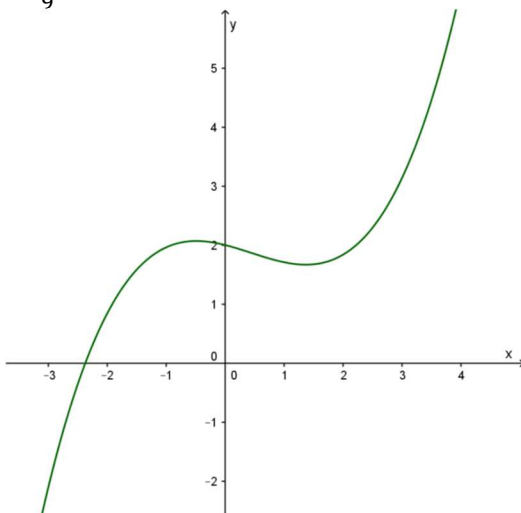
b₂) V

b₄) –

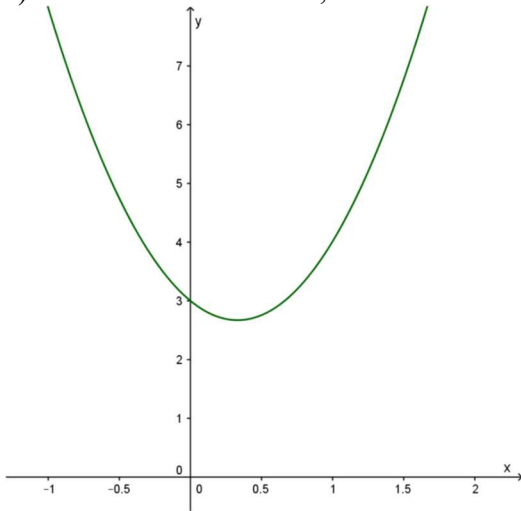
b₆) –

148/1 (T) bzw. 136/1 (NT)

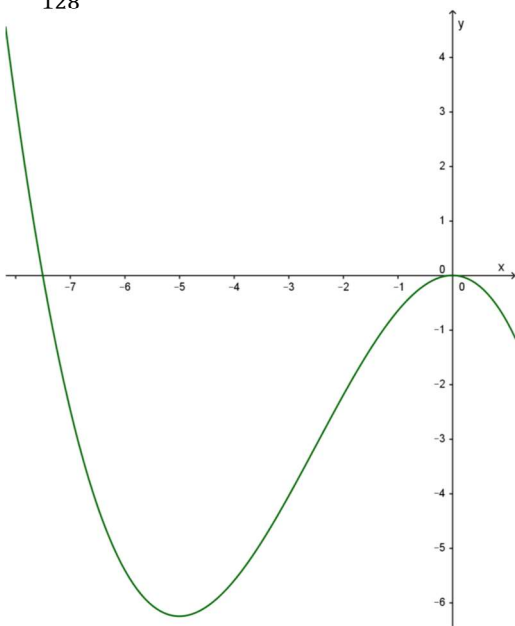
a) $\frac{64}{9}$ = Inhalt der Fläche, die von der x-Achse, G_f und den Geraden $x = -2$ und $x = 2$ eingeschlossen wird



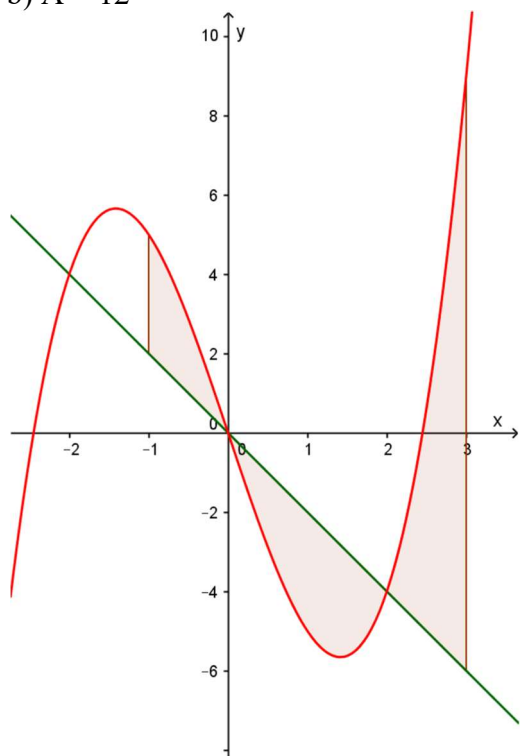
b) $15 =$ Inhalt der Fläche, die von der x-Achse, G_f und den Geraden $x = -1$ und $x = 2$ eingeschlossen wird



c) $\frac{3375}{128} =$ der Fläche, die von der x-Achse und G_f eingeschlossen wird



148/2 (T) bzw. 136/2 (NT) grün: G_f ; rot: G_g
b) $A = 12$



148/3 (T) bzw. 136/3 (NT) $A = 1,28 \text{ (m}^2\text{)}$

148/6 (T) bzw. 136/6 (NT)

$$f_1(x) = -0,1(x-1)^2 + 2,6; \quad f_2(x) = -0,1x^2 + 2,5 \implies A \approx 3,0716 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\implies V = A \cdot 0,05 \text{ cm} \approx 0,15358 \text{ cm}^3$$

$\implies$ insgesamt werden $1535,8 \text{ cm}^3 = 1,5358 \text{ l}$ Farbe benötigt $\implies$ etwa 82,92 €

I.4 Weitere Anwendungen des Integrals

Lösungen: siehe Rückseite des Übungsblatts!