III.1 Grundlagen

Potenzfunktionen mit negativen ganzen Exponenten:
Blatt:

1) a) $\frac{1}{x^3}$ b) $\frac{1}{z^5}$ c) $\frac{1}{(2y)^3} = \frac{1}{8y^3}$ d) $\frac{2}{y^3}$ e) $\frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{x^2-2x+1}$ f) $\frac{2}{(x-1)^2} = \frac{2}{x^2-2x+1}$

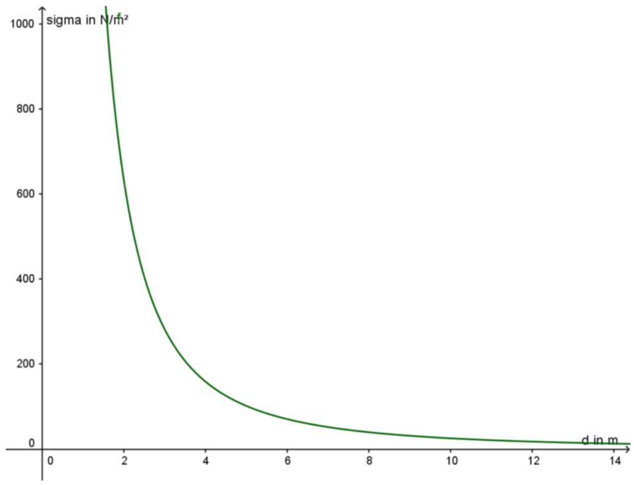
g) $1-\frac{1}{x^2}$ h) $\frac{1}{x^2}+y$ i) $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\left(\neq \frac{1}{x^2+y^2}!\right)$ k) $2x-\frac{1}{x}$ l) $\frac{2}{x}-x$ m) $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\left(\neq \frac{1}{x-y}!\right)$

2) a) $\frac{ab}{c}$ b) $\frac{b}{ac}$ c) $\frac{1}{abc}$ d) $\frac{a}{bc}$ e) $\frac{(ab)^2c}{b} = a^2bc$ f) $\frac{b}{c}$

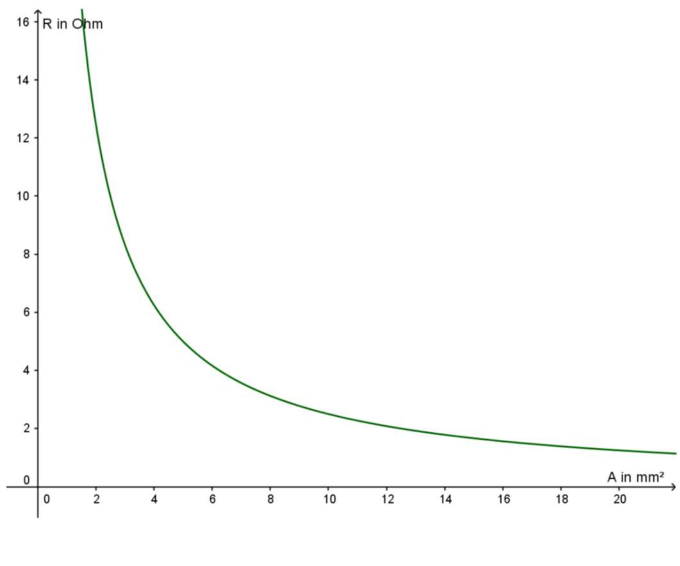
3) a) y^{-1} b) $6x^{-2}$ c) $2x^{-1} + 3x^{-3}$ d) $x - 5x^{-1} + x^{-2}$ e) $(1 + x)^{-1}$ f) $(1 + x^2)^{-1}$ g) $3ax^{-5}$
h) $(man)^{-1} = m^{-1}a^{-1}n^{-1}$ i) $m\,(an)^{-1} = ma^{-1}n^{-1}$ k) $m\,(a + n)^{-1}$ l) $(m + a)n^{-1}$ m) $(n + a)\,(m + a)^{-1}$

298/6 $a = 5;\quad b = 3$

298/8 $\sigma(d) = \frac{8000\ \mathrm{N}}{\pi\, d^2}$



298/9 $R(A) = \frac{25{,}004\ \Omega\ \mathrm{mm}^2}{A}$



311/16
a) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{2\}$ ist nicht symmetrisch bezüglich x = 0
b) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0; -1\}$ ist nicht symmetrisch bezüglich x = 0 bzw. $f(-x) \neq f(x)$ und $f(-x) \neq -f(x)$

Blatt 49

a) D = R\{3}; $x_1 = \frac{2}{3} \in$ D   b) D = R\{0; 2}; $x_1 = 1{,}5 \in$ D

c) D = R\{0; 3}; $x_1 = -1{,}5 \in$ D (; $x_2 = 3 \notin$ D)   d) D = R\{2; –1}; $x_1 = -\frac{4}{3} \in$ D (; $x_2 = 2 \notin$ D)

Lösen von Bruchgleichungen:

Blatt 100/9   a) L = {}   b) L = {–3}   c) L = {}   d) L = {}   e) L = {}   d) L = ℝ

Lösen von Bruchungleichungen:

Blatt 45/2

a)]–4;1[b)]–3;1[c) $]-\infty;-2[\cup[6;\infty[$ d)]–4;–3]

III.2 Verhalten an Definitionslücken

298/1 f_2; f_3; f_5

298/2 f_1; f_3; f_4

298/3   z.B.! $f_1(x) = \frac{x^2}{x^2}$; $f_2(x) = \frac{x}{x}$; $f_3(x) = \frac{x\cdot(x+1)^2}{(x+1)^2}$

Blatt 53/1

a) D = R\{1}; $x_1 = 1$ ist Pol 1. Ordnung

b) D = R\{±2}; $x_1 = 2$ ist Pol 1. Ordnung; $x_2 = -2$ ist SHD

c) D = R\{–3;–4}; $x_1 = -3$ und $x_2 = -4$ sind Pole 1. Ordnung

d) D = R\{0;3}; $x_1 = 0$ ist SHD; $x_2 = 3$ ist Pol 1. Ordnung

e) D = R\{0,5;–4}; $x_1 = 0{,}5$ ist Pol 1. Ordnung; $x_2 = -4$ ist SHD

f) D = R\{0; 2}; $x_1 = 0$ ist Pol 1. Ordnung; $x_2 = 2$ ist SHD

III.3 Asymptoten

298/4

a) $D_g = \mathbb{R}\{-1; 2\}$

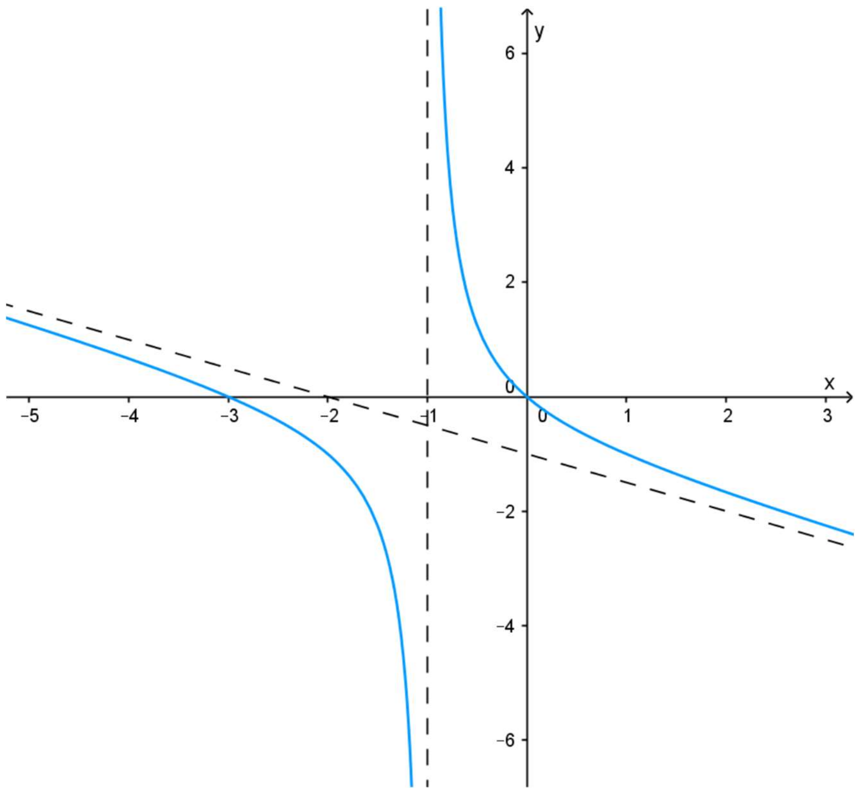
b) $x_1 = -1$ ist Polstelle 1. Ordnung (mit VZW); $x_2 = 2$ ist SHD

Nullst.: $x_1 = 0$; $x_2 = -3$

c) s. As.: $x = -1$;   sch. As.: $y = -\frac{1}{2}x - 1$

d)

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	–0,75	–1,25
g(x)	2/3	0	–1	n.d.	0	–1	n.d.	–2,25	3,375	–4,375



e) $\bar{g}(x) = -\frac{x^2+3x}{2x+2}$

<u>298/5</u> z. B. $x^3 - 9x + 1$ oder $x^3 - 9x - 5$

<u>298/7</u>

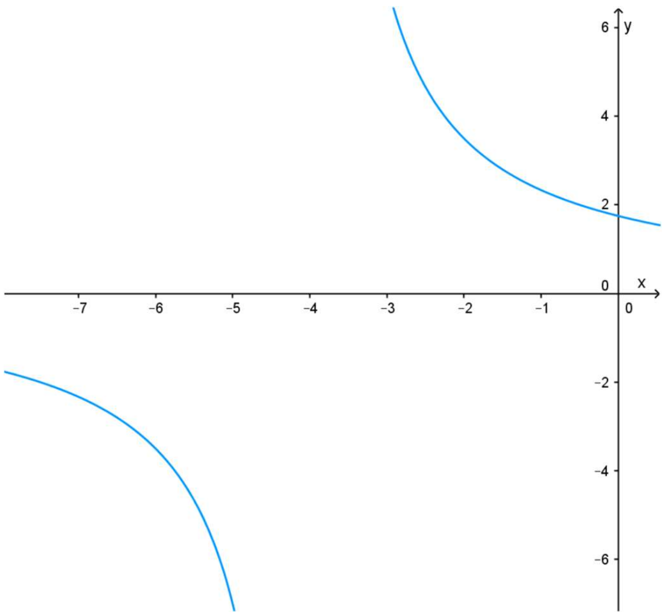
a) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-4\}$; keine Symmetrie zum KS (aber zu P$(-4|0)$)

$x_1 = -4$ ist Polstelle 1. Ordnung (mit VZW)

s. As.: $x = -4$; w. As.: $y = 0$

$\lim\limits_{x\to-4^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-4^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0^-$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0^+$

$S_y(0|1{,}75)$; keine N



b) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$; keine Symmetrie zum KS (aber zu P$(-1|4)$)

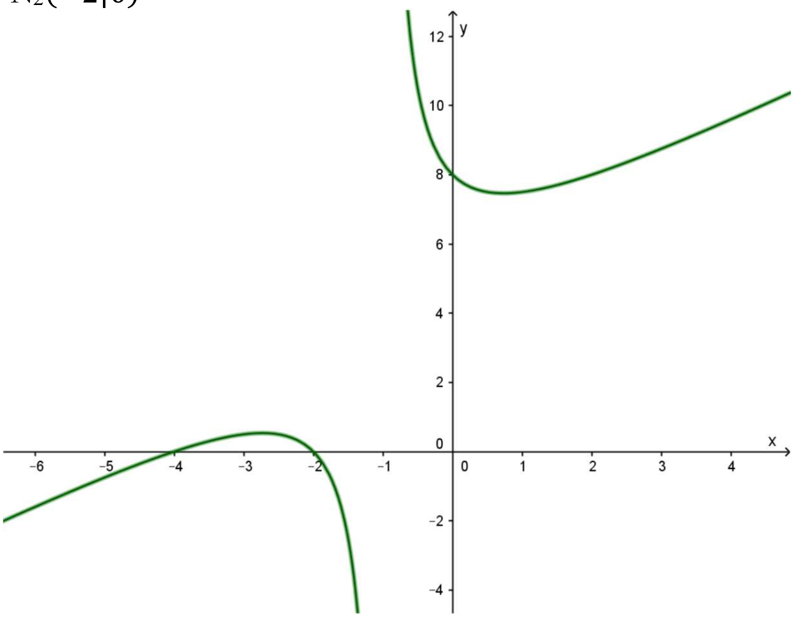
$x_1 = -1$ ist Polstelle 1. Ordnung (mit VZW)

s. As.: $x = -1$; sch. As.: $y = x + 5$

$\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - (x+5)) = 0^-$; $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - (x+5)) = 0^+$

$S_y(0|8)$; $N_1(-4|0)$, $N_2(-2|0)$



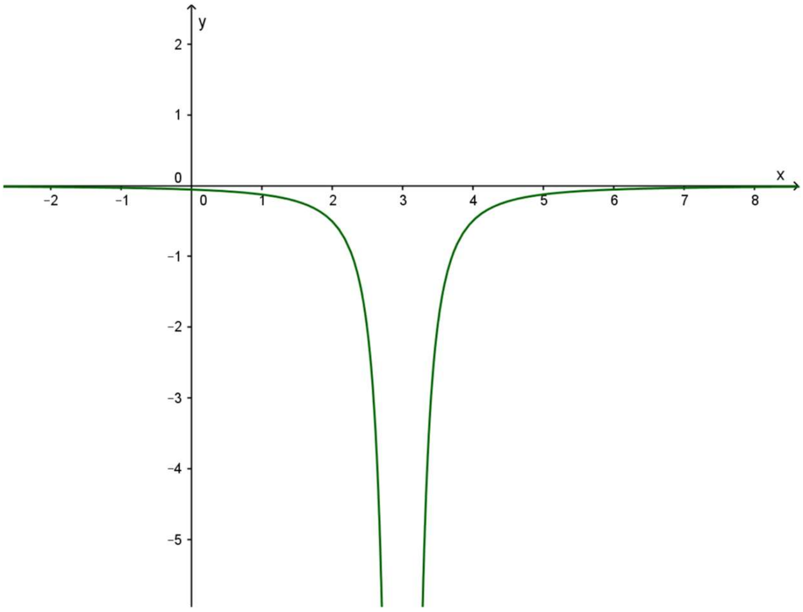
c) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{3\}$; keine Symmetrie zum KS (aber zu x = 3)

$x_{1,2} = 3$ ist Polstelle 2. Ordnung (ohne VZW)

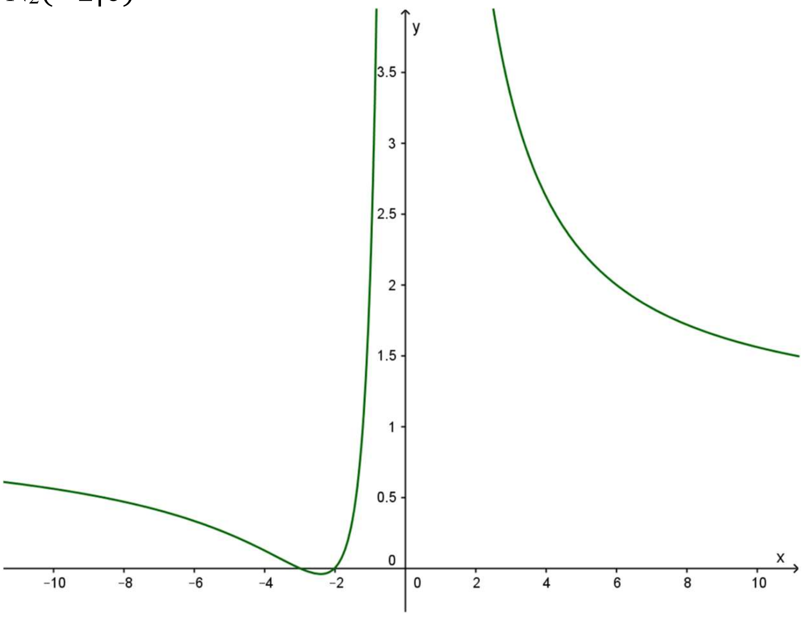
s. As.: $x = 3$;   w. As.: $y = 0$

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0^-$

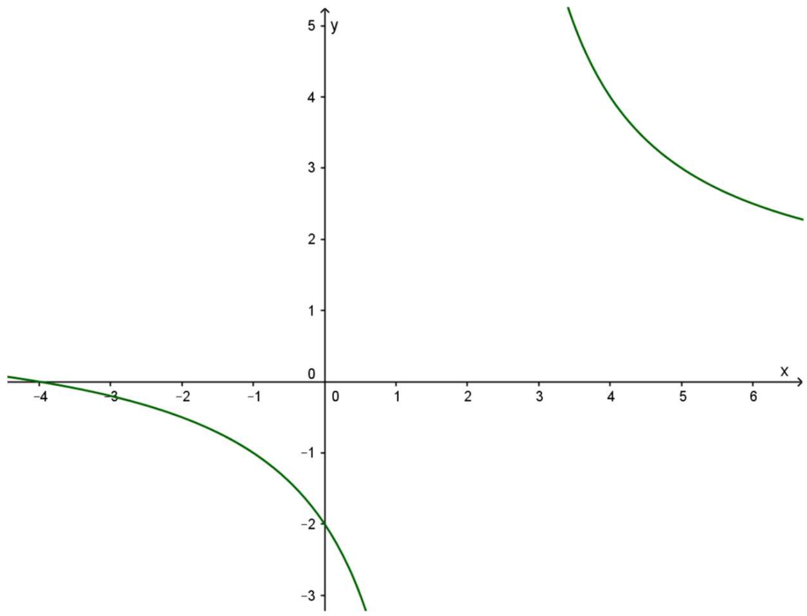
kein S_y;   keine N



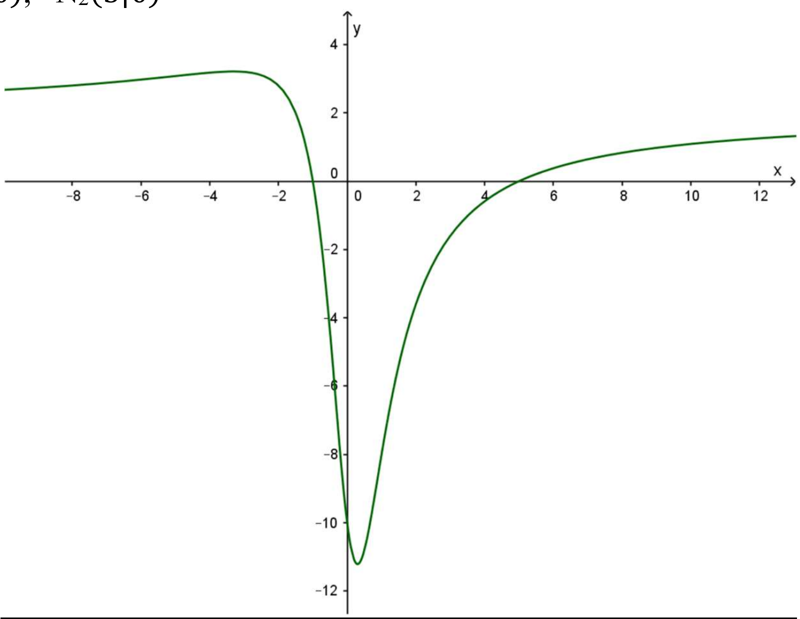
d) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$; keine Symmetrie zum KS
$x_{1,2} = 0$ ist Polstelle 2. Ordnung (ohne VZW)
s. As.: $x = 0$; w. As.: $y = 1$
$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 1^-$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1^+$
kein S_y; $N_1(-3|0)$, $N_2(-2|0)$



e) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{2\}$; keine Symmetrie zum KS (aber zu $P(2|1)$)
$x_1 = 2$ ist Polstelle 1. Ordnung (mit VZW)
s. As.: $x = 2$; w. As.: $y = 1$
$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 1^-$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1^+$
$S_y(0|-2)$; $N(-4|0)$



f) $D_f = \mathbb{R}$; keine Symmetrie zum KS
keine Definitionslücken
w. As.: $y = 2$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2^+$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2^-$
$S_y(0|-10)$; $N_1(-1|0)$, $N_2(5|0)$



298/10 a) gelb, grün b) grün

308/1 1k, 2l, 3m, 4b, 5e, 6d, 7g, 8h, 9c, 10i, 11a, 12f

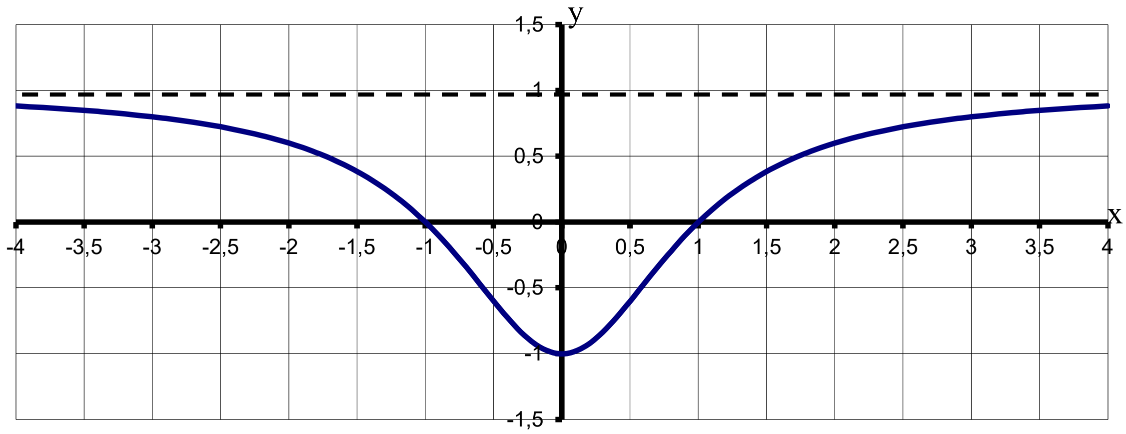
312/19

- $\mathbb{R}$ ohne die Nullstellen des Nenners
- Zähler und Nenner haben einen gemeinsamen Faktor (Zahl oder Linearfaktor; im zweiten Fall: gemeinsame Nullstelle)
- x_0 ist Definitionslücke und $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existiert (genau dann, wenn der Linearfaktor $(x - x_0)$ im Nenner vollständig weggekürzt werden kann)
- Loch
- Term von f, in dem der Linearfaktor $(x - x_0)$ im Nenner vollständig weggekürzt wurde
- Nullstellen des Zählers, die zur Definitionsmenge gehören
- siehe Merkhilfe; auch Symmetrie von D_f beachten!

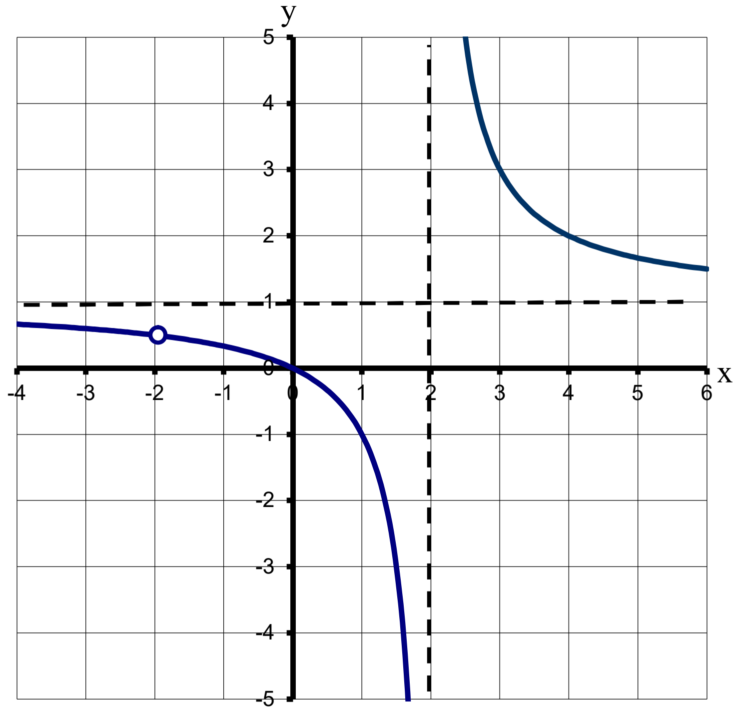
- s. As.: $x = x_0$, wobei x_0 eine Polstelle ist; w. As.: ZG < NG ==> y = 0; ZG = NG ==> y = Quotient der LK; sch. As.: ZG = NG + 1, Polynomdivision durchführen, y = linearer Teil des Funktionsterms; As.kurve: ZG > NG + 1, Polynomdivision durchführen, y = ganzrationaler Teil des Funktionsterms

<u>Blatt 58/1</u>

a) $D = \mathbb{R}$; keine s. A.; w. A.: $y = 1$; $x_{1,2} = \pm 1$ beide einfach



b) $D = \mathbb{R}\backslash\{\pm 2\}$; $x_1 = -2$ ist SHD, $x_2 = 2$ ist Pol 1. Ordnung ➔ s. A. $x = 2$; w. A. $y = 1$; $x_1 = 0$ einfach

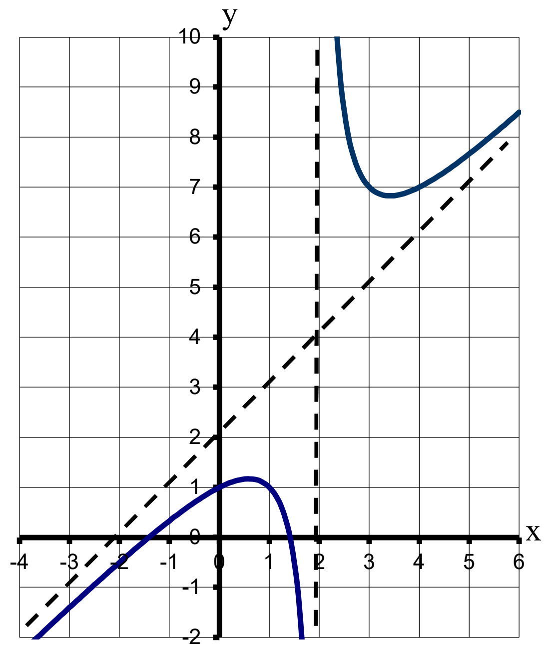


c) $D = \mathbb{R}\backslash\{2\}$; $x_1 = 2$ ist Pol 1. Ordnung ➔ s. A. $x = 2$; sch. A. $y = x + 2$; $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$ beide einfach

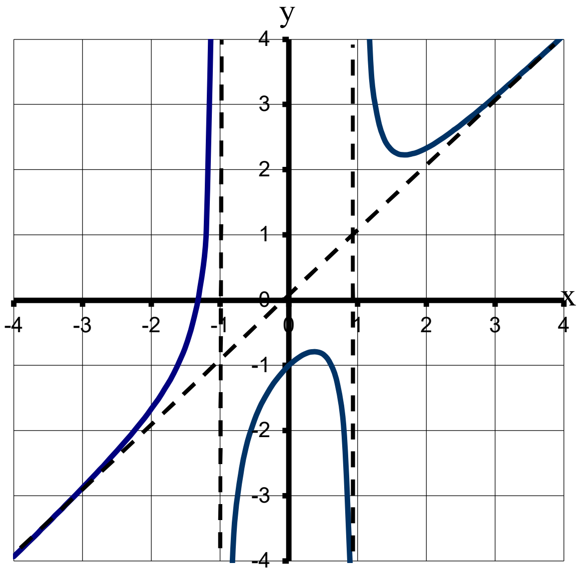
d) $D = \mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$; $x_{1,2} = \pm 1$ sind Pole 1. Ordnung ➔ s. A. $x = -1$ und $x = 1$; sch. A. $y = x$; $x_1 \approx -1{,}32$

e) $D = \mathbb{R}\backslash\{1;-0{,}5\}$; $x_1 = 1$ ist SHD; $x_2 = -0{,}5$ ist Pol 1. Ordnung ➔ s. A. $x = -0{,}5$; w. A. $y = 0$; keine Nullstellen

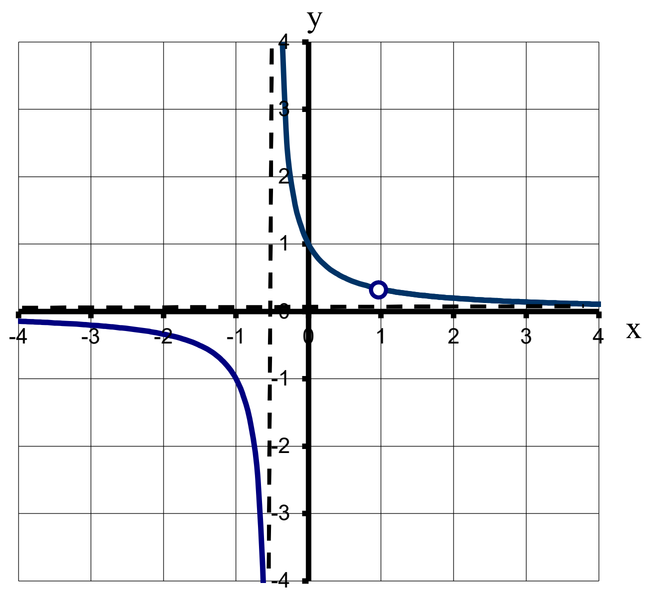
Graph zu c)



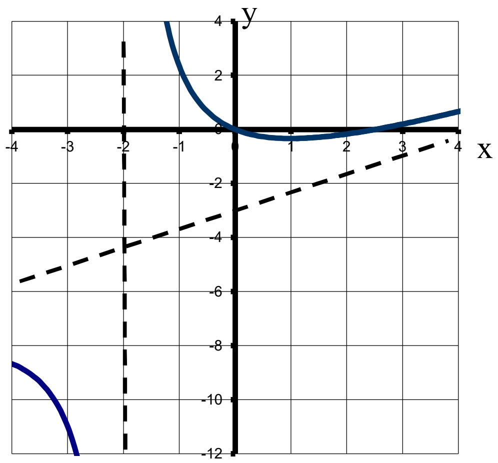
Graph zu d)



Graph zu e)



f) D = R\{–2}; $x_1 = -2$ ist Pol 1. Ordnung ➔ s. A. x = –2; sch. A. y = $\frac{2}{3}$x – 3; $x_1 = 0$; $x_2 = 2{,}5$ (einfach)



III.4 Ableitungen

kaum Aufgaben im neuen Buch! (nur „Alles klar" 299, 300)

a) mit der Potenz- (und Ketten)regel
Übungsblatt (Lambacher-Schweizer Analysis 2):
191/23

a) $-x^{-2}$ b) $-4x^{-5}$ c) $-6x^{-4}$ d) $-2{,}5x^{-6}$ e) $-2x^{-3}$ f) $-18x^{-7}$ g) $-1{,}5x^{-4}$ h) $-\frac{20}{3}x^{-5}$ i) $-2at^{-3}$

j) $-3ct^{-4}$ k) $-\frac{p}{q}r^{-2}$ l) $-\frac{4}{a}s^{-3}$

191/25 a) 2x b) 1,5 c) $0{,}75 + 1{,}25x^{-2}$ d) $-2x^{-3} - x^{-2}$

191/26 a) $-\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{(1-x)^2}$ b) $-\frac{1}{2x^3} + \frac{4x}{(2x^2-1)^2}$ d) $-\frac{2}{u^3} + \frac{2u}{(u^2-1)^2}$

189/7 a) $-\frac{1}{x^2}$ b) $-\frac{1}{x^2} - 2x$ c) $-\frac{3}{x^2}$

192/29 a) $-\frac{6ax}{(b+x^2)^2}$ b) $\frac{3}{b+x^2}$ c) $-\frac{3a}{(b+x^2)^2}$ d) 0

195/12 a) $6\,(2-3x)^{-3}$ b) $-3\,(0{,}5x-5x^3)^{-4}\,(0{,}5-15x^2)$ c) $16t\,(1-2t^2)^{-5}$ d) $(2t-1)\,(t-t^2)^{-2}$

e) $\frac{4}{(1-2x)^3}$ f) $-\frac{12x+6}{(x+x^2)^4}$ g) $-\frac{60x}{(1+3x^2)^5}$ h) $-\frac{\sqrt{2}(1+4t)}{(t+2t^2)^4}$ i) $\frac{6x-3}{(2+x-x^2)^4}$

j) $-\frac{2(a+1)(2x-1)}{(a^2-x+x^2)^3}$ k) $-\frac{b}{(a+bt)^2}$ l) $-\frac{2a(b+1)}{(bt+t)^3}$

Übungsblatt (winklers):

75/4 e) D = R\{1}; f '(x) = $3 - \frac{1}{(1-x)^2}$; f ''(x) = $-\frac{2}{(1-x)^3}$

f) D = R\{$-\frac{1}{3}$}; f '(x) = $2 - \frac{12}{(3x+1)^2}$; f ''(x) = $\frac{72}{(3x+1)^3}$

b) mit der Quotientenregel
Übungsblatt (Lambacher-Schweizer Analysis 2):

191/17 a) $\frac{2}{(1+3x)^2}$ b) $\frac{x^2-6x-1}{(x^2+1)^2}$ c) $\frac{2x}{(1+3x^2)^2}$ d) $\frac{x^4-4x^2-1}{(x^2-1)^2}$

191/18 a) $\frac{26x}{(x^2+4)^2}$ b) $-\frac{12x^2}{(2+x^3)^2}$ c) $\frac{-t^4-4t^2+1}{(t^2+1)^2}$ d) $\frac{4r^5-8r^3}{(r^2-1)^2}$

191/19 a) $\frac{6x^2+90}{(15-x^2)^2}$ b) $\frac{8t^2+8t+10}{(2t+1)^2}$ c) $\frac{3a^2-8a-8}{(3a-4)^2}$ d) $\frac{0{,}8t^2+2t-1{,}5}{(1+0{,}8t)^2}$

191/20 a) $-\frac{2ab}{(a+bx)^2}$ b) $\frac{-2abx^2+2bc}{(ax^2-bx+c)^2}$ c) $\frac{c^2t^2+2cdt+cd}{(ct+d)^2}$ d) $\frac{3x^{-4}}{(x^{-3}-1)^2}=\frac{3x^2}{(1-x^3)^2}$

75/4 (ohne c; winklers 12 technische Ausbildungsrichtungen)
a) D = R\{1}; f '(x) = $-\frac{2}{(x-1)^2}$; f ''(x) = $\frac{4}{(x-1)^3}$ b) D = R; f '(x) = $\frac{4x}{(x^2+1)^2}$
d) D = R\{–1;+1}; f '(x) = $-\frac{6x}{(x^2-1)^2}$

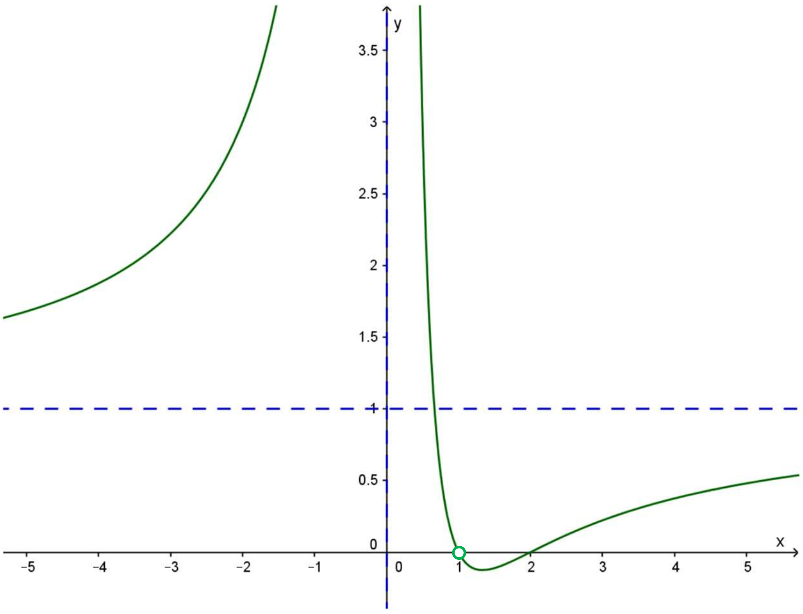
c) mit der Quotienten- und Kettenregel
75/4 b) f ''(x) = $\frac{-12x^2+4}{(x^2+1)^3}$ c) f '(x) = $\frac{4x+6}{(x+1)^3}$; f ''(x) = $\frac{-8x-14}{(x+1)^4}$
d) f ''(x) = $\frac{18x^2+6}{(x^2-1)^3}$

III.5 Kurvendiskussion

307/1
a) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0;1\}$; $x_{1,2}=0$ ist Polstelle 2. Ordnung (ohne VZW), $x_3=1$ ist SHD

$$\bar{f}(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^2}=1-3\,x^{-1}+2\,x^{-2}$$

b) $x_1 = 2$
c) „am Rande" --> „an den Rändern"!
$\lim_{x\to-\infty} f(x)=1^+$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1^-$; w. As.: y = 1
$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^+} f(x)=+\infty$; s. As.: x = 0
$\lim_{x\to1^-} f(x)=0^+$; $\lim_{x\to1^+} f(x)=0^-$
d) S$\left(\frac{2}{3}\middle|1\right)$ e) TiP$\left(\frac{4}{3}\middle|-\frac{1}{8}\right)$
f) G_f ist linksgekr. in $]-\infty;0[$ und $]0;2]\backslash\{1\}$, rechtsgekr. in $[2;\infty[$; WeP$(2|0)$
g)



<u>307/2</u>

a) G_f ist symmetrisch zum Ursprung

b) „am Rande" --> „an den Rändern"!

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = +\infty$; s. As.: x = 0

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$

$x_{1,2} = \pm 2$ sind Polstellen 1. Ordnung (mit VZW)

s.As.: $x = -2$ und $x = 2$; sch. As.: $y = \frac{1}{2}x$

c) $x_{1,2,3} = 0$

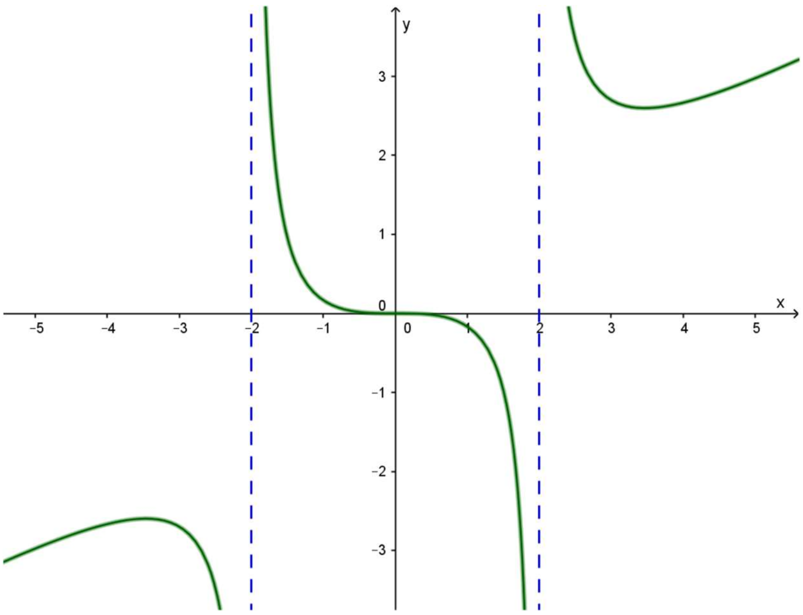
d) TeP(0|0); HoP$\left(-2\sqrt{3}\middle|-\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$; TiP$\left(2\sqrt{3}\middle|\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$

e) G_f ist rechtsgekr. in $]-\infty; -2[$ und $]-2; 0]$, linksgekr. in $[0; 2[$ und $]2; +\infty[$; WeP$(0|0)$

f)

X	-5	$-2{,}25$	$-1{,}75$	0	1,75	2,25	5
f(x)	$\approx -2{,}98$	$\approx -5{,}36$	$\approx -2{,}86$	0	$\approx 2{,}86$	$\approx 5{,}36$	$\approx 2{,}98$

g)



309/2

a) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$; keine Symmetrie zum KS (aber zu $P(1|8)$)

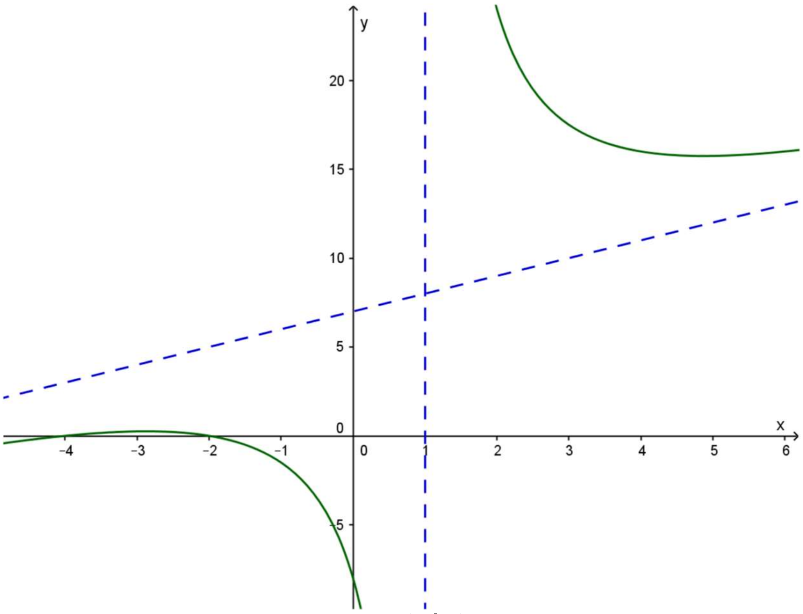
$\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(x+7)) = 0^-$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(x+7)) = 0^+$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty$

$S_y(0|-8)$; $N_1(-4|0)$, $N_2(-2|0)$

$HoP\left(1-\sqrt{15}\middle|8-2\sqrt{15}\right)$; $TiP\left(1+\sqrt{15}\middle|8+2\sqrt{15}\right)$

keine WeP

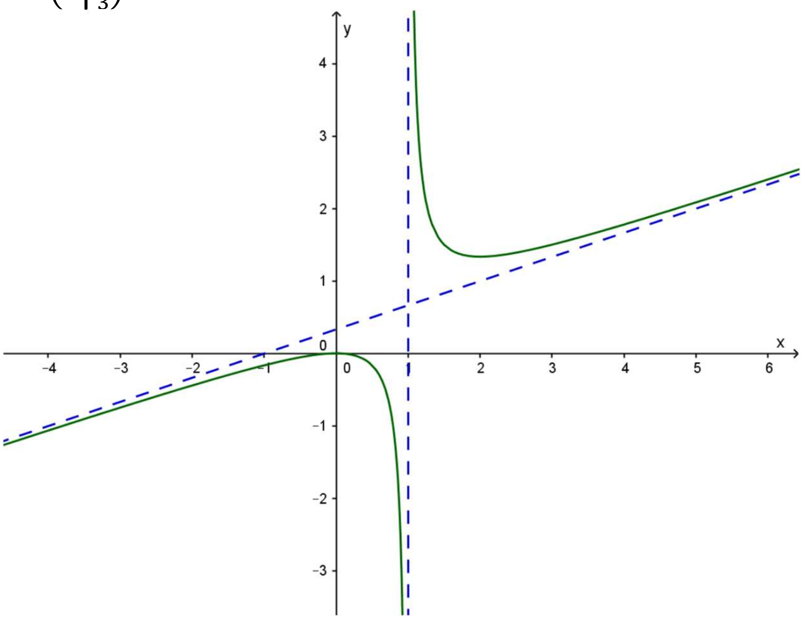


b) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$; keine Symmetrie zum KS (aber zu $P\left(1\middle|\frac{2}{3}\right)$)

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\right)\right) = 0^-$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\right)\right) = 0^+$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty$

$S_y(0|0) = N = HoP$; $TiP\left(2\middle|\frac{4}{3}\right)$; keine WeP



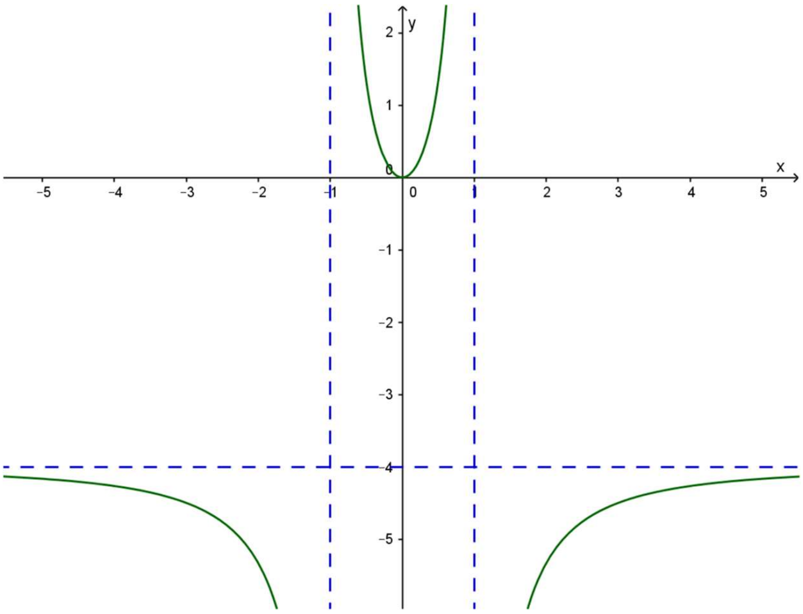
c) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{\pm1\}$; symmetrisch zur y-Achse

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = -4^-$

$\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = -\infty$

$S_y(0|0) = N = TiP$; keine WeP

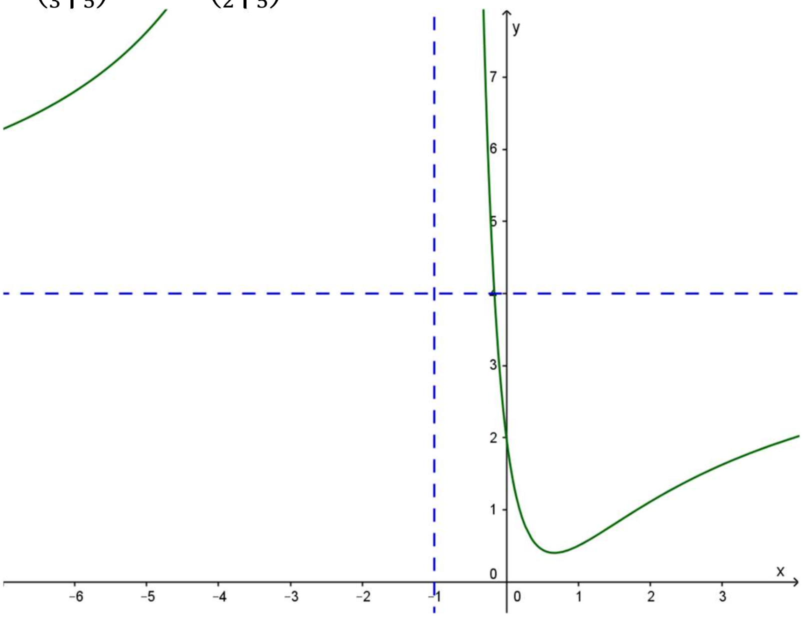


d) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$; keine Symmetrie zum KS

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 4^+$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 4^-$

$\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$

$S_y(0|2)$; keine N; TiP$\left(\frac{2}{3}\middle|\frac{2}{5}\right)$; WeP$\left(\frac{3}{2}\middle|\frac{4}{5}\right)$

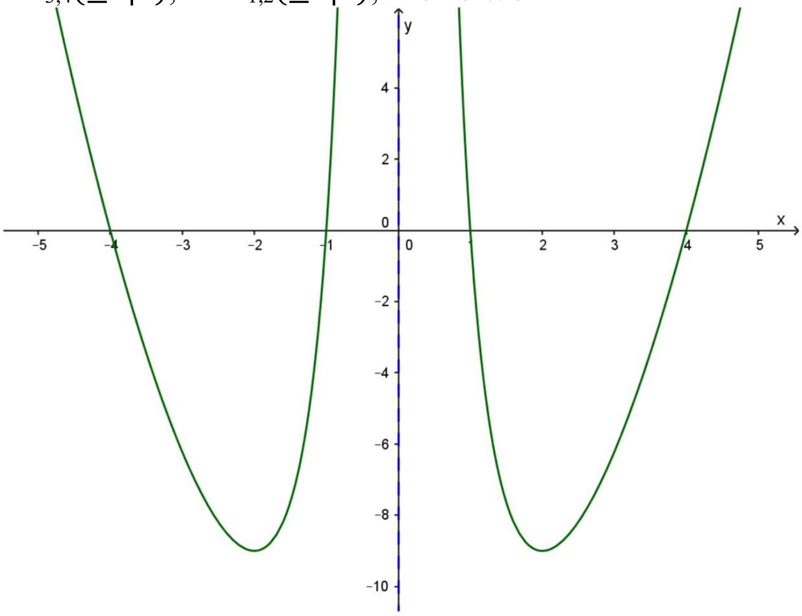


e) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$; symmetrisch zur y-Achse

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

kein S_y; $N_{1,2}(\pm 1|0)$, $N_{3,4}(\pm 4|0)$; $TiP_{1,2}(\pm 2|9)$;   keine WeP

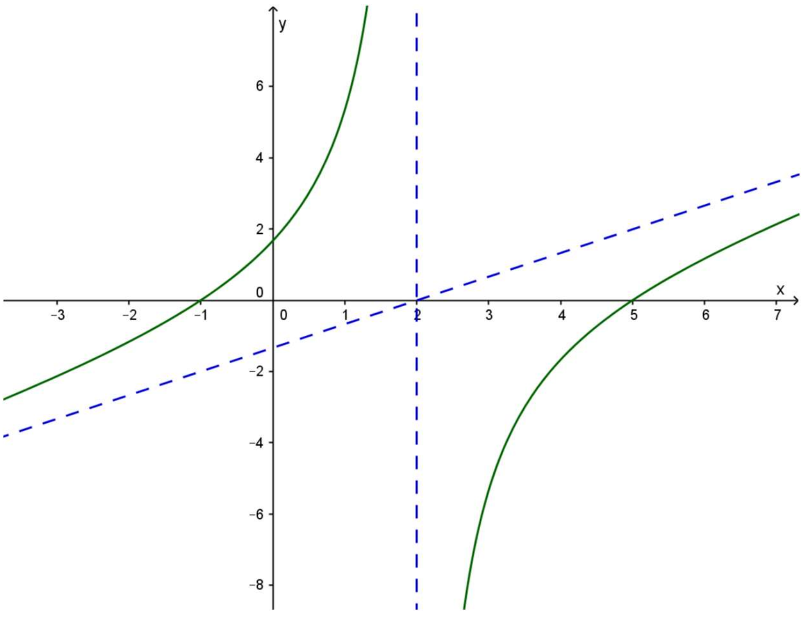


f) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{2\}$; keine Symmetrie zum KS (aber zu P(2|0))

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x) - \left(\frac{2}{3}x - \frac{4}{3}\right)\right) = 0^+$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x) - \left(\frac{2}{3}x - \frac{4}{3}\right)\right) = 0^-$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$

$S_y\left(0\middle|\frac{5}{3}\right)$; $N_1(-1|0)$, $N_2(5|0)$;   keine ExP;   keine WeP



g) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{\pm 2\}$; symmetrisch zum Ursprung

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x) - \frac{1}{2}x\right) = 0^-$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x) - \frac{1}{2}x\right) = 0^+$

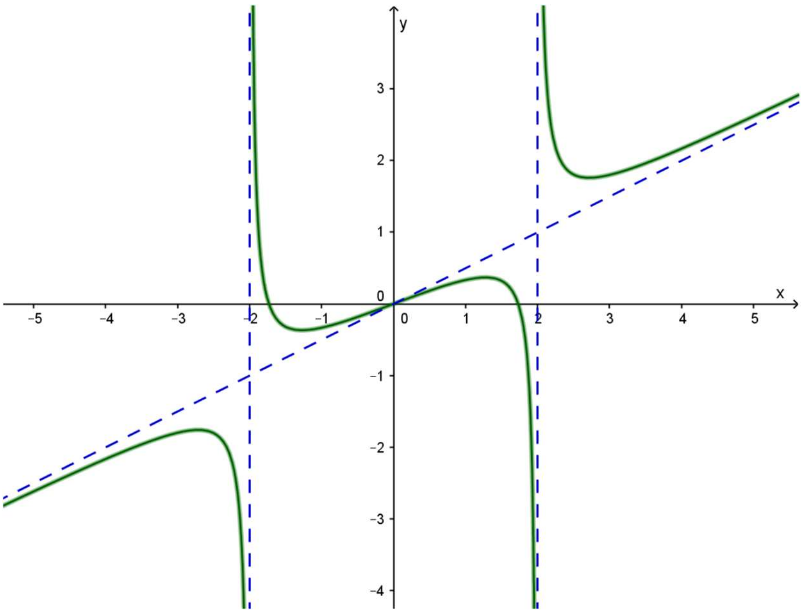
$\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$

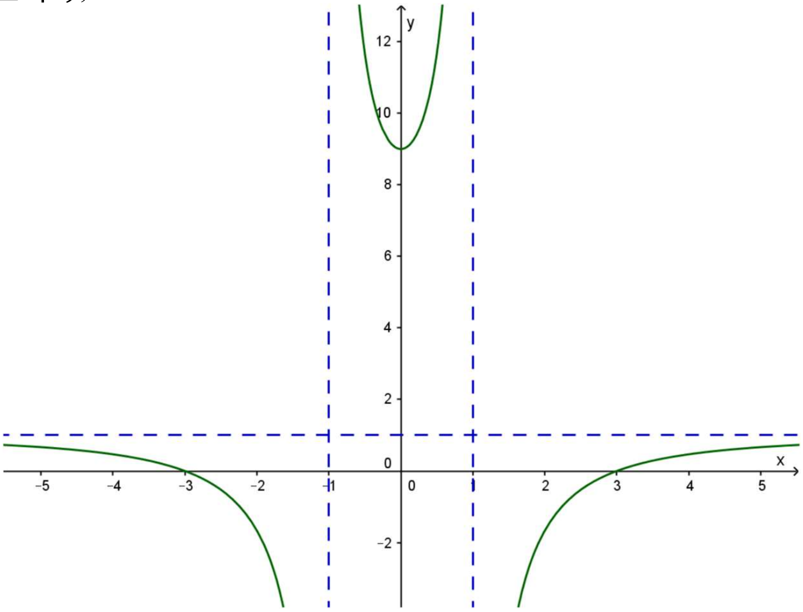
$S_y(0|0) = N$; $N_{2,3}(\pm\sqrt{3}|0)$;   WeP(0|0)

$HoP_1(\approx -2{,}72| \approx -1{,}76)$; $TiP_1(\approx -1{,}28| \approx -0{,}37)$;

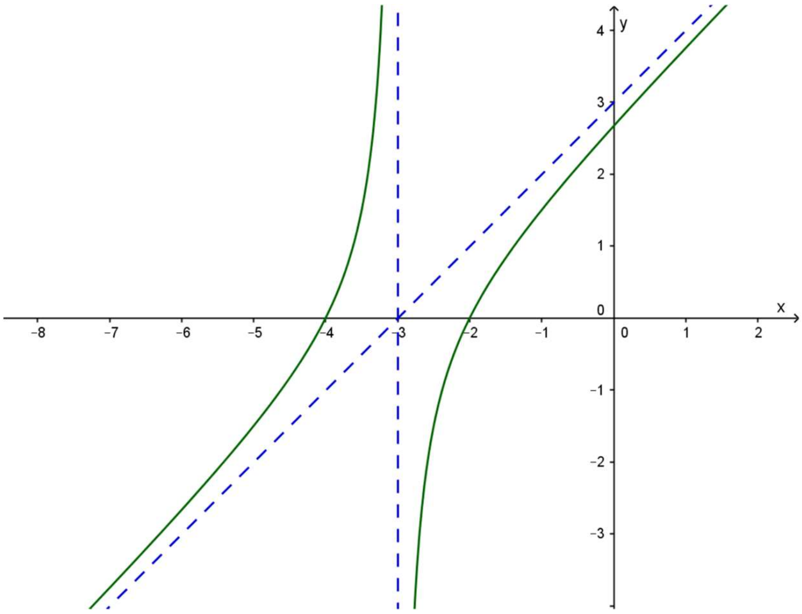
$HoP_2(\approx 1{,}28| \approx 0{,}37)$; $TiP_2(\approx 2{,}72| \approx 1{,}76)$



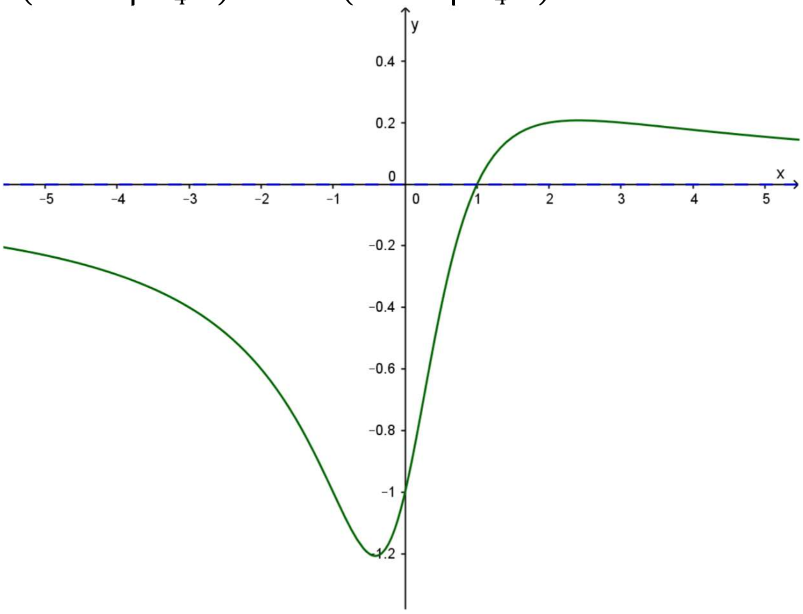
h) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$; symmetrisch zur y-Achse
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 1^-$
$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$
$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$
$S_y(0|9) = \text{TiP}$; $N_{1,2}(\pm 3|0)$; keine WeP



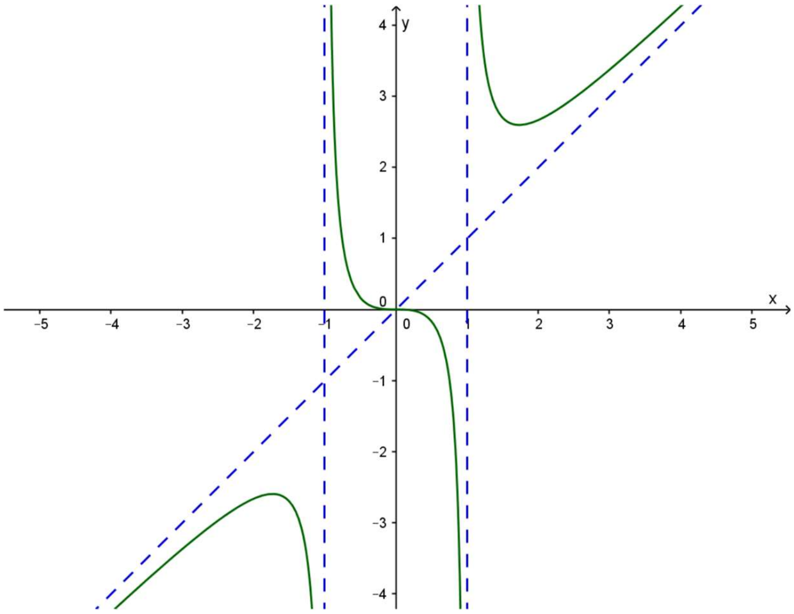
i) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-3\}$; keine Symmetrie zum KS (aber zu $P(0|-3)$)
$\lim\limits_{x\to -\infty} (f(x) - (x+3)) = 0^+$; $\lim\limits_{x\to +\infty} (f(x) - (x+3)) = 0^-$
$\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = -\infty$
$S_y\left(0\middle|\frac{8}{3}\right)$; $N_1(-4|0)$, $N_2(-2|0)$; keine ExP; keine WeP



j) $D_f = \mathbb{R}$; keine Symmetrie zum KS
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0^-$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0^+$
$S_y(0|-1)$; $N(1|0)$; $\mathrm{TiP}\left(1-\sqrt{2}\middle|\frac{-1-\sqrt{2}}{2}\right)$, $\mathrm{HoP}\left(1+\sqrt{2}\middle|\frac{-1+\sqrt{2}}{2}\right)$
$\mathrm{WeP}_1(-1|-1)$, $\mathrm{WeP}_2\left(2-\sqrt{3}\middle|\frac{-1-\sqrt{3}}{4}\right)$, $\mathrm{WeP}_3\left(2+\sqrt{3}\middle|\frac{-1+\sqrt{3}}{4}\right)$



k) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$; symmetrisch zum Ursprung
$\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x)-x) = 0^-$; $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-x) = 0^+$
$\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$
$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty$
$S_y(0|0) = N = \mathrm{WeP}$; $\mathrm{HoP}\left(-\sqrt{3}\middle|-\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$, $\mathrm{TiP}\left(\sqrt{3}\middle|\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$



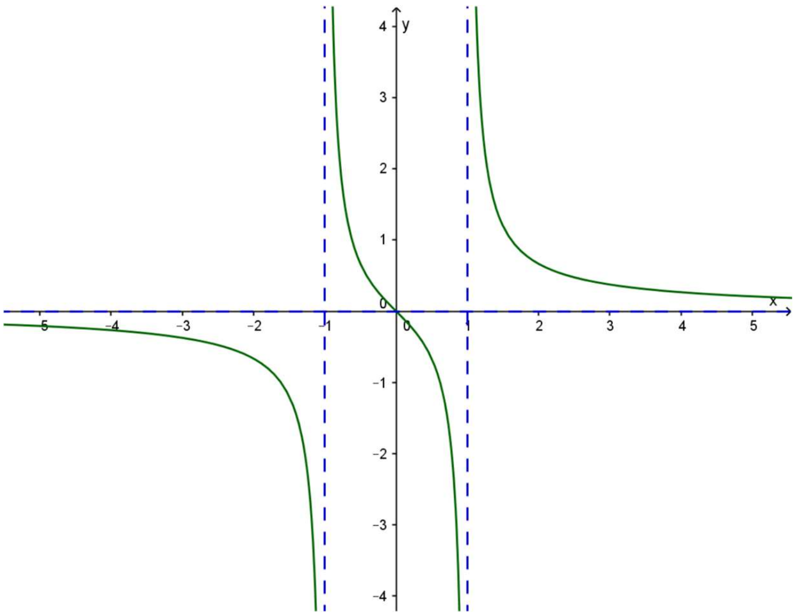
l) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$; symmetrisch zum Ursprung

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0^-$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0^+$

$\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty$

$S_y(0|0)$ = N = WeP; keine ExP



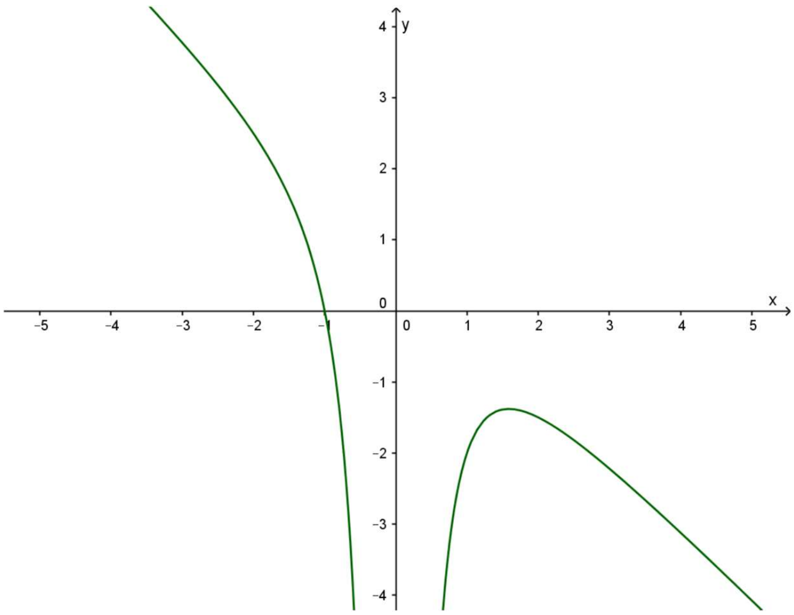
309/6

a) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$; $x_1 = -1$

b) sch. As.: $y = -x + 1$; $f(x) = -x + 1$ hat keine Lösung

c) P($\approx 1{,}59| \approx -1{,}38$)

d)



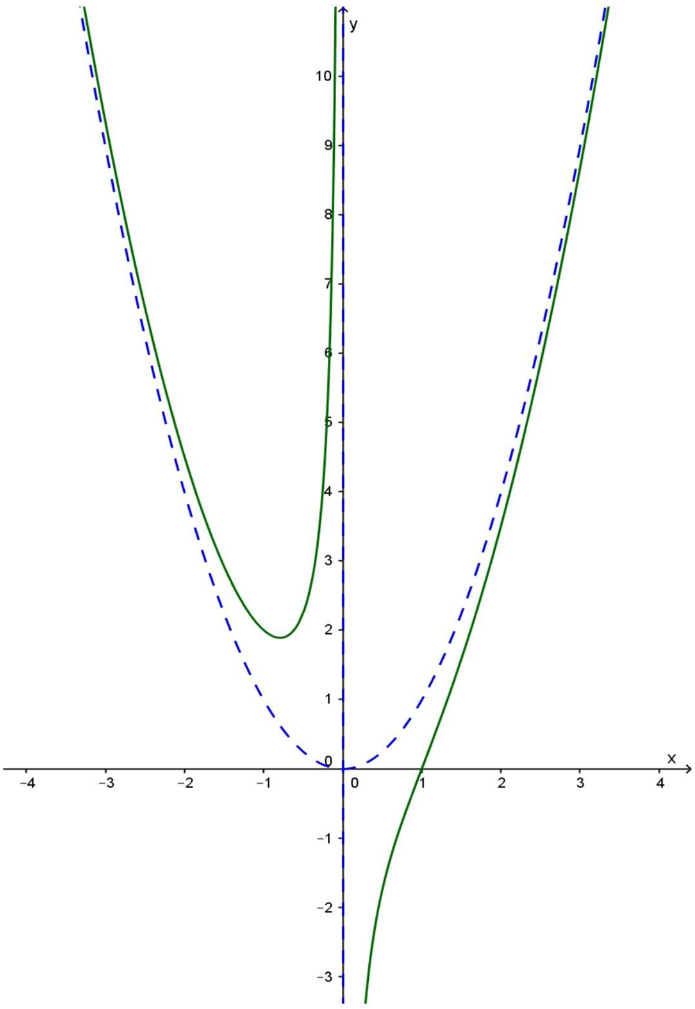
309/7

a) s. As.: x = 0

b) Polynomdivision ist unnötig; Bruchrechnen!

$f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$ ==> Asymptotenkurve: $y = x^2$

c)



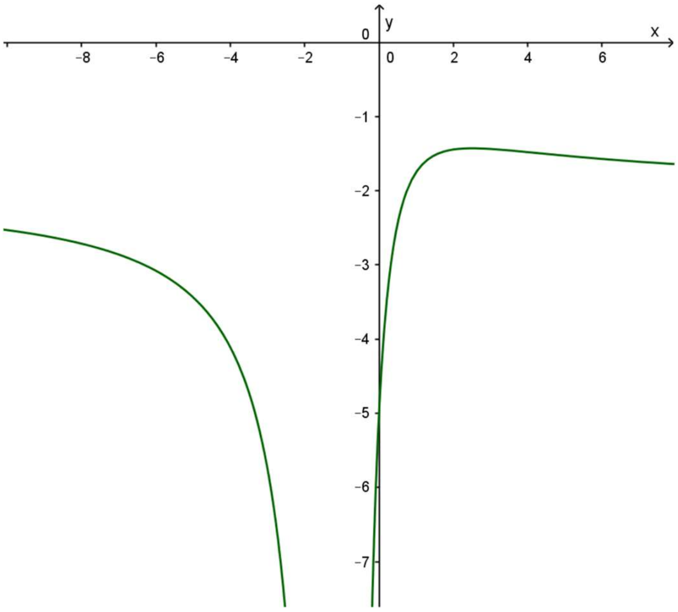
310/12

a) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1; 2\}$; $x_1 = -1$ ist Polstelle 2. Ordnung (ohne VZW); $x_2 = 2$ ist SHD

b) s.As.: $x = -1$;   w. As.: $y = -2$

c) $S_y(0|-5)$;   HoP$\left(2{,}5\middle|-\frac{10}{7}\right)$

d)



311/14

- Im Nenner von f ' steht hoch 1 statt hoch 2; bei der Berechnung von f " wird dann seltsamerweise richtig hoch 2 verwendet.
- aus f " > 0 folgt TiP, aus f " < 0 folgt HoP
- bei der Berechnung der Funktionswerte wurde im Zähler jeweils die binomische Formel vergessen; die richtigen Ergebnisse sind $4 + 2\sqrt{3}$ bzw. $4 - 2\sqrt{3}$

311/15

a) keine Symmetrie zum KS

b) $x_{1,2} = 1$ ist Polstelle zweiter Ordnung (ohne VZW);   Nullst.: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1^+$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1^-$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty$

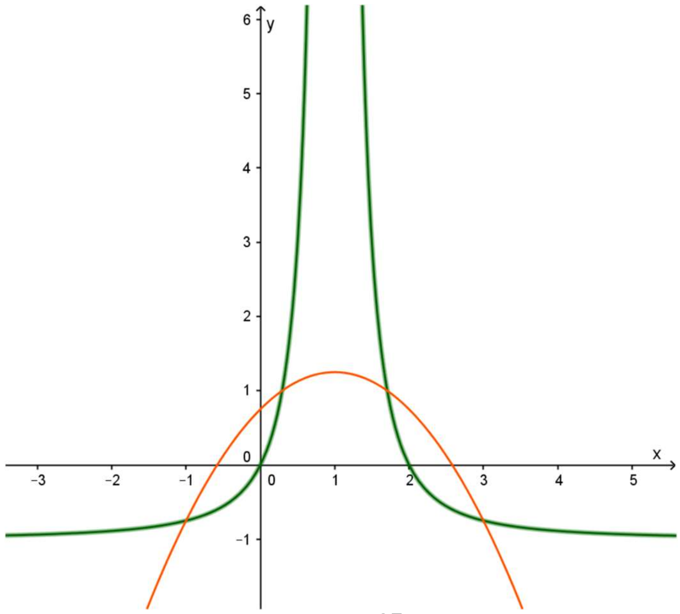
s.As.: $x = 1$;   w. As.: $y = -1$

d) G_f ist sms in $]-\infty; 1[$, smf in $]1; +\infty[$

G_f ist linksgekrümmt in $]-\infty; 1[$ und $]1; +\infty[$

e) $y = -\frac{1}{4}x$;   Q(0|0)

f,j) G_f: grün; P_A: orange



g) x = 1 h) F'(x) = ... = f(x) i) A = $\frac{27}{16}$

j) S$_1(-1|-0{,}75)$, S$_2(3|-0{,}75)$, S$_{3,4}\left(1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\middle|1\right)$

k) A $\approx 0{,}371$ (linke Fläche; wie auch immer man vorher schon sehen soll, dass das die größere ist)

l) A $= \frac{11}{3} + \frac{25}{12}\sqrt{2} \approx 0{,}720$

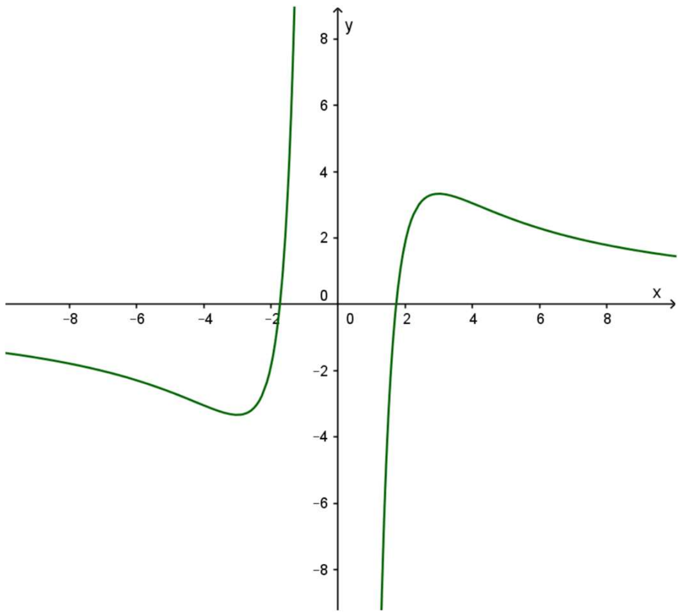
<u>312/18</u>

a) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$; $x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$; s. As.: $x = 0$; w. As.: $y = 0$ b) symmetrisch zum Ursprung

c) $f'(x) = 15\ \frac{9-x^2}{x^4}$; $f''(x) = 30\ \frac{x^2-18}{x^5}$ d) TiP$\left(-3\middle|-\frac{10}{3}\right)$; HoP$\left(3\middle|\frac{10}{3}\right)$

e) WeP$\left(3\sqrt{2}\middle|\frac{25}{12}\sqrt{2}\right)$ ==> $t_W(x) = -\frac{5}{12}x + \frac{10}{3}\sqrt{2}$ f) $t_H(x) = \frac{10}{3}$

g)



<u>313/20, Teil 1</u>

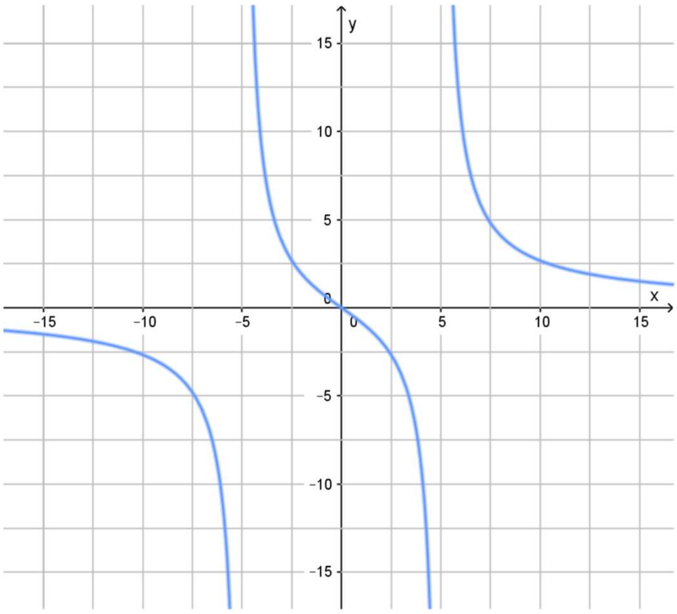
a) $x^2 - 25 \neq 0$ ==> $x_{1,2} \neq \pm 5$ ==> $D_f = \mathbb{R}\backslash\{\pm 5\}$ ist symmetrisch zu x = 0

und $f(-x) = \cdots = -f(x)$ ==> G$_f$ ist symmetrisch zum Ursprung

$x_1 = 0$; s. As.: $x = -5$ und $x = 5$; w. As.: $y = 0$

b) $f'(x) = -20\ \frac{x^2+25}{(x^2-2\ \ )^2}$; Zähler > 0, Nenner > 0 in D_f ==> $f'(x) < 0$ in D_f

c)



III.6 Funktionsterme aufstellen

309/3 $f(x) = \frac{4x}{x^2+x+2}$

309/4 $f(x) = \frac{18}{25}\frac{x^2(x-3)(x+2)}{(x-1)^2(x+2)}$

309/5 $f(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(x-2)(x-3)x}$ oder $f(x) = \frac{5(x-1)(x-2)}{(x-2)(x-3)(x^2+1)}$

Blatt:
Lambacher-Schweizer Analysis 2 Leistungskurs

201/10 a) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ b) $f(x) = -x + \frac{1}{x^2}$ c) $f(x) = x - \frac{1}{x-2}$

201/11 a) $f(x) = \frac{(x-1)(x+2)}{(x-4)(x+5)} = \frac{x^2+x-2}{x^2+x-20}$ b) $f(x) = \frac{(x-0{,}5)x}{(x-\sqrt{2})(x+1)} = \frac{x^2-0{,}5x}{x^2+(1-\sqrt{2})x-\sqrt{2}}$

winklers, Mathematik 12 Analysis, technische Ausbildungsrichtung

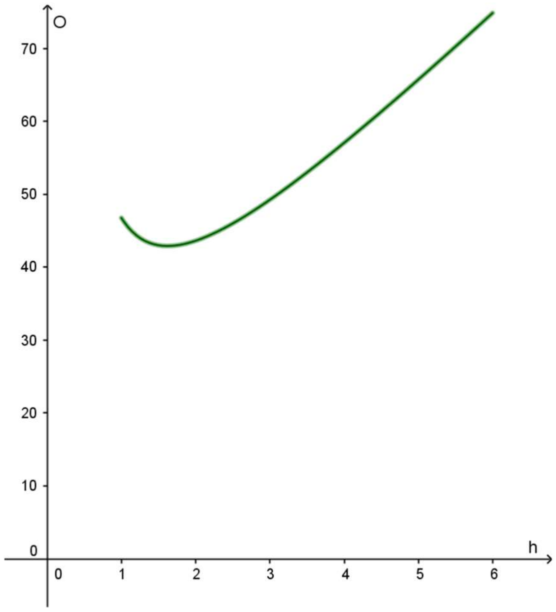
58/2 a) $f(x) = \frac{1}{x-2}$ b) $f(x) = 1 + \frac{1}{x+1}$ c) $f(x) = -2 + \frac{1}{x(x-2)}$ d) $f(x) = x + \frac{1}{x-1}$

e) $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x-3}$ f) $f(x) = 1 + \frac{1}{x^2+1}$ g) $f(x) = \frac{1}{2}x - 2 + \frac{1}{x^2-4}$ h) $f(x) = x - 3 + \frac{1}{x^2+1}$

310/8

a) $O(h) = \frac{26,25}{h} + 10h + 10,5$ b) $h > 0$

c)

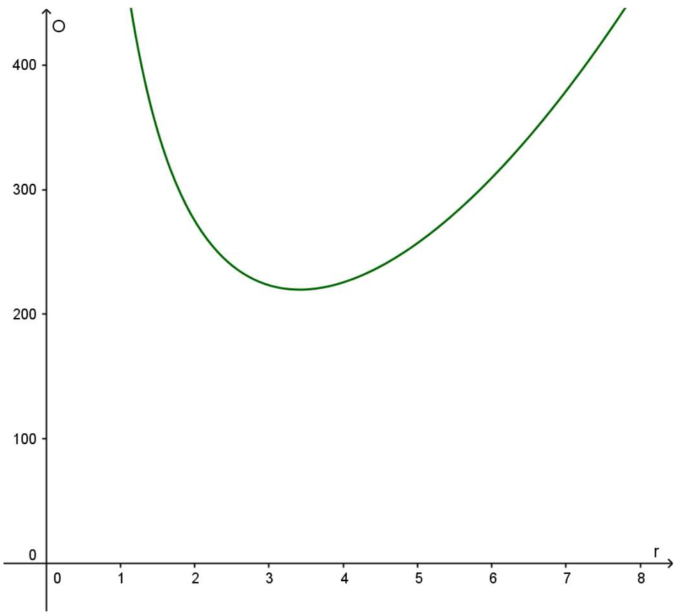


d) $O_{min} = 5\sqrt{42} + 10,5 \approx 42,90$; $b_{min} = \frac{5,25}{\sqrt{2,625}} \approx 3,24$

(Die in der Angabe gegebene Schachtel hat also fast den minimalen Oberflächeninhalt.)

310/9

$r_{min} = \frac{5}{\sqrt[3]{\pi}} \approx 3,41$



bei $r = 3$: etwa 1,6% mehr Materialbedarf

bei $r = 2,5$: etwa 8,9% mehr Materialbedarf; bei $r = 4,5$: etwa 8,5% mehr Materialbedarf; aus Monotonie ==> für alle Radien zwischen 2,5 und 4,5 höchstens 8,9% mehr Materialbedarf

(Keine Ahnung, wie man das nur ,,in Worten", ohne Rechnung, begründen soll...)

310/10

Aufgabenstellung sehr unklar formuliert; laut Musterlösung ist wohl gemeint ,, ... wie der pro cm^2 des Deckels", und das Volumen soll konstant sein. Da kein konkretes Volumen vorgegeben ist, verwendet man in der Rechnung also dafür die Variable V als Parameter. Außerdem nennen wir die Kosten pro cm^2 des Deckels k.

➔ $K(r) = \cdots = 4k\pi r^2 + \frac{6kV}{r}$;   abs. Minimum für $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$, nämlich $K = k\pi^{\frac{1}{3}}V^{\frac{2}{3}}\left(4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}} + 6 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$

<u>310/11</u>

a) Halbkugel: $O(r) = \cdots = \frac{5}{3}\pi r^2 + \frac{200}{r}$;   abs. Minimum für $r \approx 2{,}673$, nämlich $O \approx 112{,}2$

Kegel: $O(r) = \cdots = \left(\sqrt{2} + \frac{1}{3}\right)\pi r^2 + \frac{200}{r}$;   abs. Minimum für $r \approx 2{,}631$, nämlich $O \approx 114{,}0$

➔ Beim ersten Vorschlag wird weniger Blech benötigt.

b) k: Kosten pro m^2 für Zylinderoberfläche und Deckel

Halbkugel: $K(r) = k \cdot \left(\frac{11}{3}\pi r^2 + \frac{200}{r}\right)$ ==> $r_{neu} \approx 2{,}06$

Kegel: $K(r) = k \cdot \left(\left(\frac{1}{3} + 2\sqrt{2}\right)\pi r^2 + \frac{200}{r}\right)$ ==> $r_{neu} \approx 2{,}16$

<u>310/13</u> $C_1 = C_2 = 5\ \mu F$

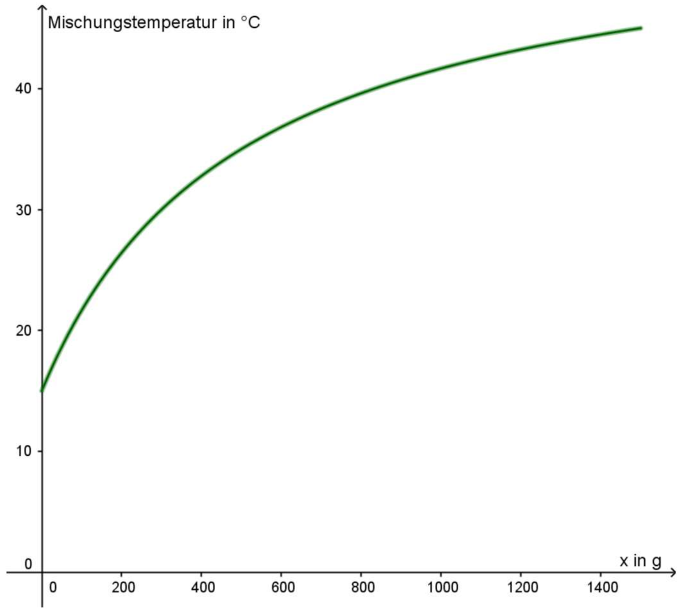
<u>312/17</u>

a)

- Ansatz erläutern: Physik! (letztlich Energieerhaltung: abgegebene Wärme = aufgenommene Wärme)
  Formel herleiten: durch c_W teilen, Klammern auflösen, $+m_1\vartheta_1$ und $+m_2\vartheta_M$, ϑ_M ausklammern, durch $(m_1 + m_2)$ teilen
- $\vartheta_M = \frac{185}{7}°C \approx 26°C$

b)

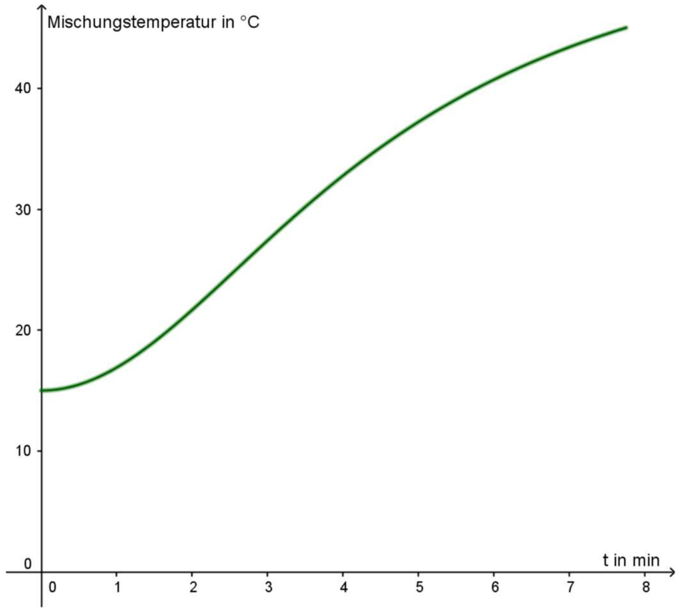
- $\vartheta_M(x) = \frac{7500+55x}{500+x}$



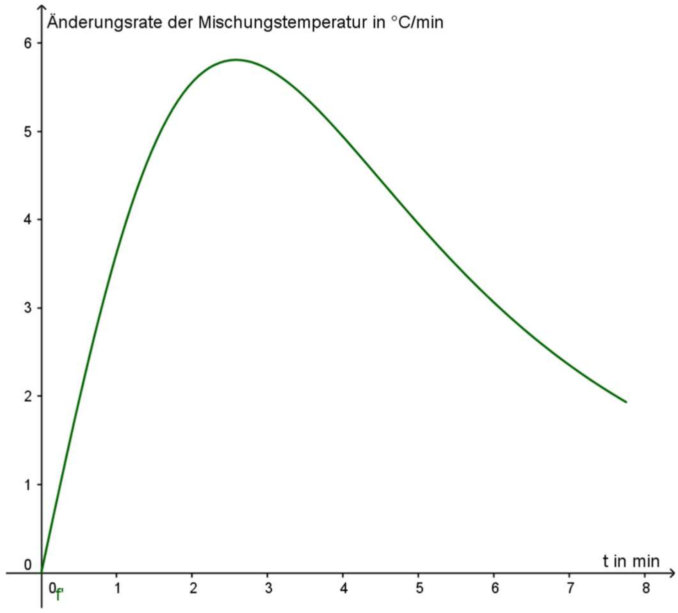
- $\vartheta_M(1500) = 45$ (°C)
- $x = 1000\sqrt{2} - 500 \approx 914$; bei dieser zugegebenen Wassermasse ist die momentane Änderungsrate der Mischungstemperatur gleich 0,01°C pro g, d. h. pro Gramm Wasser, das man mehr zugibt, erhöht sich die Mischungstemperatur um (etwa) 0,01°C
- größte Änderungsrate bei x = 0

c)

- $m(t) = 25t^2$ ist die nach der Zeit t gesamte zugegebene Masse des warmen Wassers
- $t = 2\sqrt{15} \approx 7{,}75$ (min)
- Begründung: ??? offensichtlich! $\vartheta_{M,Zeit}(t) = \frac{300+5\quad^{2}}{20+t^2}$
-

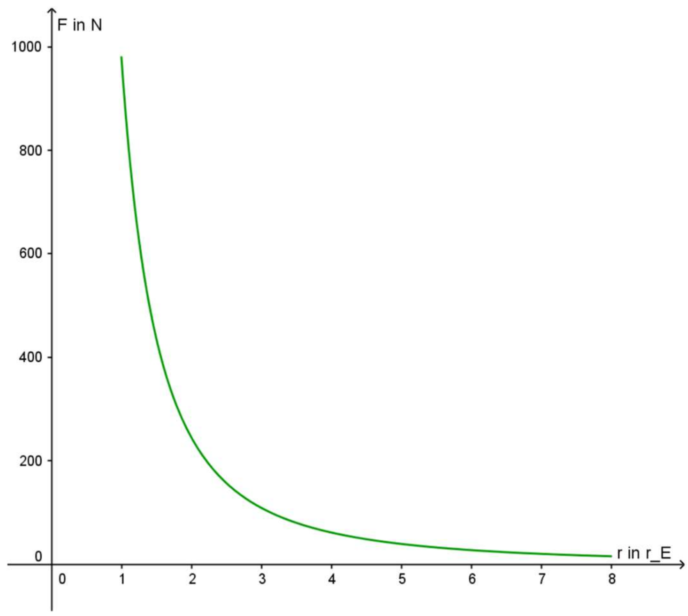


- $t = \frac{2}{3}\sqrt{15} \approx 2{,}58$ (min)

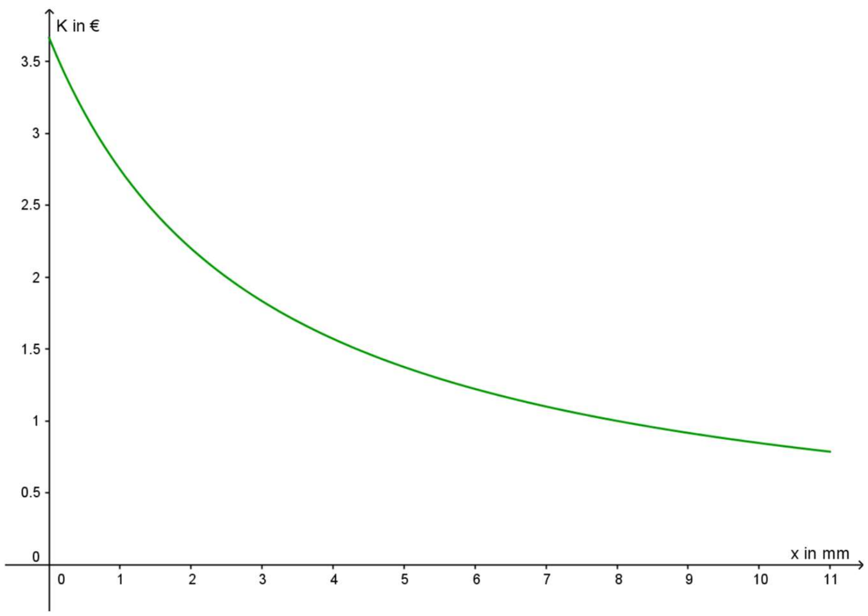


<u>313/20, Teil 2</u>
a) 160 min bzw. 64 min
b) Hinfahrt: flussaufwärts, also mit der Strömung, also Gesamtgeschwindigkeit in km/h = x + 5
Rückfahrt: flussabwärts, also gegen die Strömung, also Gesamtgeschwindigkeit in km/h = x – 5
Zeit in h = Strecke in km / Gesamtgeschwindigkeit in km/h
c) Für 0 < x < 5 kommt das Boot gar nicht gegen die Strömung an. Außerdem ist t(x) dann negativ.
d) beide Summanden auf den Hauptnenner bringen (3. binomische Formel!), zusammenfassen
e) Parallele zur x-Achse im Abstand der Fahrtzeit in h, x-Wert des Schnittpunkts ablesen
$x \approx 8 \quad \left(= 2{,}5\left(\sqrt{5}+1\right) \right)$

<u>313/21</u> als Bsp. für eine gebrochenrationale Fkt. schlecht gewählt: Das ist eine simple Potenzfunktion!
$G = 6{,}67408 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2}$; $\quad m_1 = 5{,}974 \cdot 10^{24}$ kg ==> $F(r) \approx \frac{3{,}987 \cdot 10^{16}}{r^2}$ N m²
($r_E = 6{,}378 \cdot 10^6$ km)

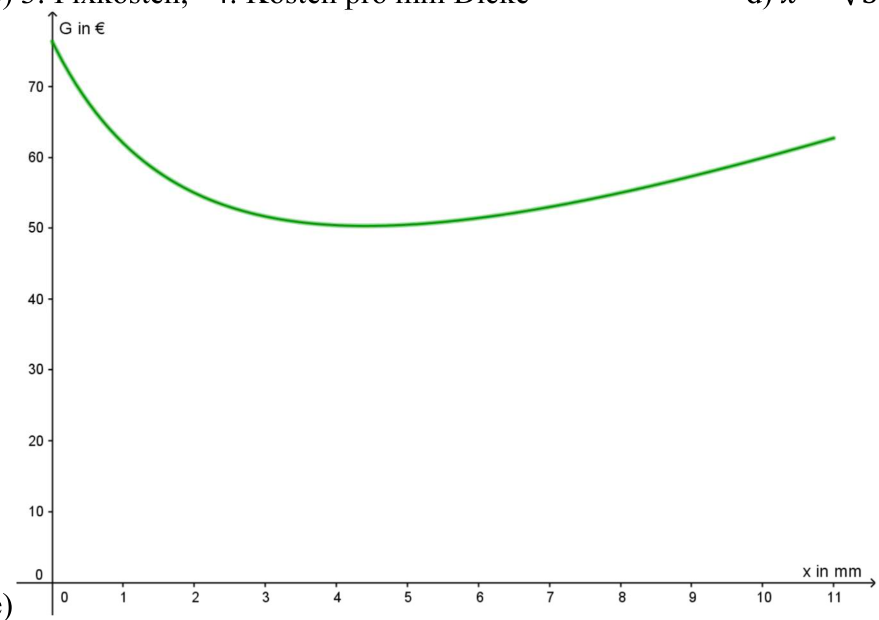


<u>314/22</u>
a) 6 mm
b)



c) 3: Fixkosten; 4: Kosten pro mm Dicke

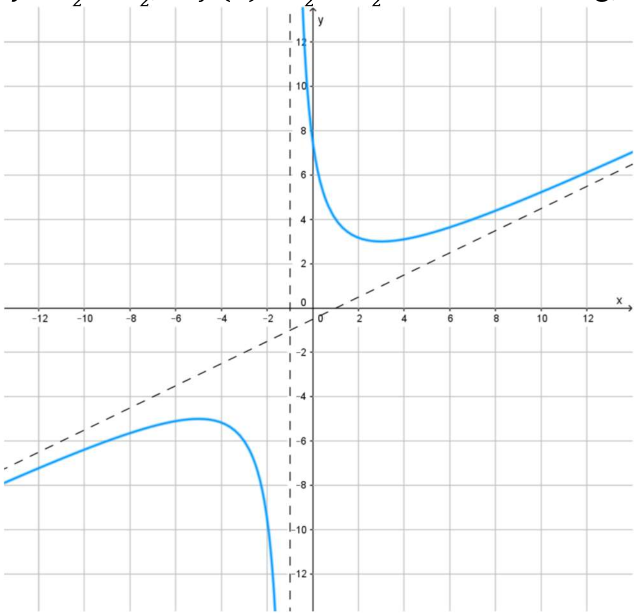
d) $x = \sqrt{55} - 3 \approx 4{,}42$



e)

314/23

a) s. As.: $x = -1$;   sch. As.: $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$; $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ hat keine Lösung;   HoP$(-5|-5)$,   TiP$(3|3)$



b) $D_g = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ist symmetrisch zu x = 0 und $g(-x) = \cdots = -g(x)$

c)

- f(0) = 7,5   und   f(15) = 7,5,   d. h. sowohl bei leerer Dose als auch bei vollständig gefüllter Dose befindet sich der Schwerpunkt jeweils genau auf halber Höhe (muss auch so sein, da in beiden Fällen die Massenverteilung symmetrisch ist)
- Der Schwerpunkt bewegt sich zunächst nach unten, ab einer Flüssigkeitshöhe von 3 cm dann wieder nach oben. Bei x = f(x) = 3 cm ist der Schwerpunkt genau auf der Höhe des Flüssigkeitsspiegels.
- aus der Abbildung: zwischen etwa x = 0,5 und etwa x = 9,5
  rechnerisch: $5 - 2\sqrt{5} \leq x \leq 5 + 2\sqrt{5}$